MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS

Liberté
Égalité
Fraternité

Les guides fondamentaux pour enseigner

La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen

Cet ouvrage a été coordonné par le service de l’instruction publique et de l’action pédagogique et le service de l’accompagnement des politiques éducatives de la direction générale de l’enseignement scolaire du ministère de l’Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports. Il a été rédigé, relu et coordonné avec le concours de l’Inspection générale de l’éducation, du sport et de la recherche.

Ce document a fait l’objet d’une relecture critique de plusieurs membres du Conseil scientifique de l’éducation nationale.

Questions fréquentes sur l'enseignement de la résolution de problèmes

La résolution de problèmes est une tâche particulièrement complexe pour les élèves. L'enseignement de la résolution de problèmes demeure une activité difficile pour beaucoup de professeurs, comme en témoignent les quelques questions recueillies ci-dessous. Ce guide fondé sur l'état de la recherche apporte des réponses à ces questions, comme l'indiquent les renvois proposés dans cette rubrique.

Quels problèmes les élèves de cours moyen doivent-ils savoir résoudre ?

Il n'est bien évidemment pas possible d'établir une liste exhaustive des problèmes que les élèves de cours moyen doivent savoir résoudre. Cependant, ce guide propose, au chapitre 1 (voir p. 16), une classification en trois catégories principales qui doit permettre d'aider les professeurs à structurer l'enseignement de la résolution de problèmes dans leur classe :

— *les problèmes en une étape ;*
— *les problèmes en plusieurs étapes ;*
— *les problèmes atypiques.*

Que faire quand un élève n'arrive pas à résoudre un problème ?

Quand un élève donne une résolution erronée, la première action du professeur doit être d'analyser la production de l'élève pour repérer la ou les difficultés rencontrées. Cette analyse peut s'appuyer sur le modèle de résolution en quatre phases (comprendre, modéliser, calculer, répondre) proposé au chapitre 2 (voir p. 42). Un exemple d'une telle analyse est développé dans un focus (voir p. 56). Il est généralement difficile de distinguer si les difficultés relèvent de la phase « comprendre » ou de la phase « modéliser » à partir des seules traces écrites ; un échange avec l'élève est alors nécessaire. Des exemples de tels échanges sont aussi proposés dans le focus mentionné précédemment. Une fois cette analyse menée, des coups de pouce appropriés peuvent être fournis. Il est important que ceux-ci ne dénaturent pas l'objectif principal de la séance. Le chapitre 3 (voir p. 65) fournit trois curseurs sur lesquels il est possible d'agir en fonction de l'objectif visé :

- *la structure du problème ;*
- *le texte du problème ;*
- *le champ numérique.*

Le paragraphe « Différencier pour permettre à tous les élèves de progresser » du chapitre 4 (voir p. 98) présente un exemple concret d'action sur ces trois curseurs.

Doit-on apprendre aux élèves à faire des schémas ? À quel moment doit-on introduire les schémas en barres ?

La réponse à la première question est évidemment positive. La compétence « représenter » fait partie des compétences que les élèves doivent développer à l'école élémentaire. Les schémas sont souvent indispensables aux élèves pour pouvoir modéliser correctement les problèmes qui leur sont soumis. Quatre types de schémas (schémas en barres, déplacements sur une droite, tableaux, arbres) sont présentés en détail dans une partie dédiée du chapitre 4 (voir p. 107). Les schémas en barres sont traditionnellement introduits progressivement à partir du CE1. Ce qui est particulièrement important pour les schémas en barres comme pour les autres outils de représentation, c'est de conserver une certaine cohérence d'utilisation d'année en année, tout au long de la scolarité obligatoire, afin de permettre aux élèves de garder les mêmes repères et de devenir de plus en plus efficaces en résolution de problèmes.

Doit-on avoir des leçons sur la résolution de problèmes dans le cahier de référence (cahier de leçons) de mathématiques ?

Oui. Les temps d'institutionnalisation en classe permettent de faire le point sur ce qui a été appris au cours de la séance, mais aussi pendant la séquence. Ce savoir devient alors un savoir de référence qui pourra être réutilisé ultérieurement. La partie « S'appuyer sur l'institutionnalisation » du chapitre 4 (voir p. 100) donne un exemple concret d'une trace écrite dans un cahier d'élève de cours moyen, produite dans le cadre d'un temps d'institutionnalisation, et de l'utilisation de cette trace écrite pour résoudre de nouveaux problèmes.

Sommaire

INTRODUCTION

CHAPITRES

Pourquoi enseigner la résolution de problèmes ?

Les éducateurs, les gouvernements, les employeurs et les chercheurs mettent systématiquement en avant la résolution de problèmes lorsqu'ils évoquent les compétences du XXIe siècle[1]. En effet, dans le contexte sociétal actuel, les citoyens ont de plus en plus besoin de compétences d'analyse et de raisonnement pour la résolution de situations et de tâches complexes.

La résolution de problèmes mathématiques à l'école primaire et au collège a pour objectif de contribuer au développement de ces compétences. Elle permet également aux élèves de consolider leurs connaissances mathématiques, de développer des compétences mathématiques (chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer[2]), d'être actifs et de renforcer leur confiance en eux. Savoir résoudre des problèmes est une finalité de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire, mais aussi le vecteur principal d'acquisition des connaissances et des compétences visées.

La résolution de problèmes, une activité à fort enjeu dans le monde

Pour beaucoup de chercheurs, « la résolution de problèmes demeure l'activité dans laquelle les élèves rencontrent le plus de difficultés »[3] et c'est un champ pour lequel les professeurs des écoles peinent à construire un enseignement répondant aux besoins

1 — Cynthia Luna Scott, « Les apprentissages de demain 2 : quel type d'apprentissage pour le XXIe siècle ? », *Recherche et prospective en éducation : réflexions thématiques*, n° 14, 2015.

2 — BOENJS n° 31 du 30 juillet 2020 (https://eduscol.education.fr/87/j-enseigne-au-cycle-3).

3 — Pierre Barrouillet et Valérie Camos, « Savoirs, savoir-faire arithmétiques et leurs déficiences », dans Michèle Kail et Michel Fayol (dir.), *Les Sciences cognitives et l'école. La question des apprentissages*, PUF, 2003.

des élèves. Comme de nombreux travaux de recherche, l'enquête Pisa[4], pilotée par l'OCDE, a permis de confirmer que les difficultés des élèves ne peuvent s'expliquer par le seul niveau des connaissances et compétences mathématiques pour résoudre un problème, en effet, « de nombreux autres facteurs interviennent comme la connaissance en jeu, la familiarité avec le contexte du problème, la lisibilité de l'énoncé, etc.[5] ».

« Surmonter les défis […] suppose une évolution des pratiques d'enseignement permettant leur mise en cohérence avec les ambitions affichées. Les études des pratiques enseignantes menées dans le cadre de recherches didactiques et de formations, tout comme les enquêtes menées par les institutions internationales, montrent en effet que ce n'est pour l'instant généralement pas le cas. L'enseignement des mathématiques dans la scolarité de base est trop souvent encore un enseignement peu stimulant […].
Les recherches et expérimentations montrant que d'autres alternatives sont possibles, productives en termes d'apprentissage et donnant aux élèves une autre vision des mathématiques et de leur capacité à saisir la signification de cette science, se sont pourtant accumulées au fil des années […]. Elles mettent l'accent sur la place à accorder à la résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques, que ces problèmes soient utilisés pour motiver et préparer l'introduction de nouvelles notions, ou qu'ils permettent de les travailler et les exploiter après qu'elles aient été introduites. L'apprentissage y est perçu comme une opération progressive de prise de sens au fil de la rencontre de situations problématiques soigneusement choisies et organisées […]. »

Michèle Artigue, *Les Défis de l'enseignement des mathématiques dans l'éducation de base*, Unesco, Paris, 2011.

Les élèves français en difficulté en résolution de problèmes

Si les difficultés des élèves en résolution de problèmes sont une préoccupation pour les pays du monde entier, les enquêtes nationales et internationales mettent régulièrement en lumière que la situation est inquiétante pour les élèves de France. Ceci transparaît notamment dans le traitement du problème ci-après qui a été proposé en 2015, dans le cadre de l'évaluation Timss[6], aux élèves de fin de CM1.

---

4 — Pisa : Programme international pour le suivi des acquis des élèves (https://www.oecd.org/pisa-fr/).
5 — Éric Roditi, Franck Salles, « Nouvelles analyses de l'enquête Pisa 2012 en mathématiques : un autre regard sur les résultats », dans « Évaluation des acquis : principes, méthodologie, résultats », *Éducation et Formations*, n° 86-87, ministères chargés de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche, Direction de l'évaluation et de la prospective, 2015.
6 — Timss : Trends in International Mathematics and Science Study ; enquête internationale mesurant les acquis des élèves de CM1 en mathématiques et en sciences.

> *« Une bouteille de jus de pomme coûte 1,87 zed.*
> *Une bouteille de jus d'orange coûte 3,29 zeds.*
> *Julien a 4 zeds.*
> *Combien de zeds Julien doit-il avoir en plus pour acheter les deux bouteilles ?*
> *A. 1,06 zed B. 1,16 zed C. 5,06 zeds D. 5,16 zeds »*

Pour ce problème, les élèves français ont obtenu le plus faible taux de réussite des pays de l'Union européenne participants, avec un score de 42 %, alors que le tiers des autres pays de l'Union européenne a obtenu des scores de réussite moyens entre 62 et 70 %, et que Singapour a même atteint un taux de réussite de 79 %[7]. Au-delà du cas particulier de ce problème et du taux de réussite observé en France, des difficultés des élèves en résolution de problèmes sont observées depuis plusieurs années dans la plupart des pays de l'OCDE.

> ***« Ces faibles performances ont conduit de nombreux chercheurs à examiner, de façon approfondie, les stratégies adoptées par les élèves en résolution de problèmes. Ces derniers ont, notamment, mis à jour l'usage, par les élèves, de démarches de résolution superficielles telles que la non prise en compte des connaissances du monde réel dans la résolution et une résolution reposant sur la recherche d'indices sémantiques. Or, ces démarches s'avèrent inefficaces pour résoudre de véritables problèmes au sens où l'individu ne connaît pas d'emblée la démarche à adopter pour solutionner le problème. À cet effet, les chercheurs qui se sont penchés sur cette problématique préconisent un changement au niveau des pratiques d'enseignement et d'apprentissage de la résolution de problèmes. Plus précisément, ces derniers s'accordent sur la nécessité de reconceptualiser les activités de résolution de problèmes comme des exercices de modélisation, de proposer des recueils de problèmes variés, d'adopter une méthodologie ouverte, autrement dit, de favoriser la diversité des démarches et des stratégies de résolution et d'introduire de nouvelles normes socio-mathématiques, plus appropriées. »***

Vanessa Hanin et Catherine Van Nieuwenhoven, « Évaluation d'un dispositif pédagogique visant le développement de stratégies cognitives et métacognitives en résolution de problèmes en première secondaire », *Évaluer. Journal international de recherche en éducation et formation*, Vol. 2, n° 1, p. 53-88, 2016.

Ainsi, au-delà de la performance obtenue se pose la question des indices sur lesquels un élève s'est appuyé pour aboutir au résultat. En effet, « la recherche d'indices sémantiques » évoquée ci-dessus mène à des réussites lorsque ces indices encouragent la modélisation attendue. Toutefois, ces réussites s'apparentent à des faux positifs dès lors qu'il y a échec de l'élève en l'absence de ces indices. Les cas les plus évidents sont les choix d'opération influencés par des mots clés comme « de plus » induisant une addition ou « perdre » une soustraction. Ce phénomène est toutefois bien plus large encore, car il concerne aussi les relations entre les entités présentes dans les énoncés, comme des fleurs et des vases par exemple, qui induisent *a priori* une relation multiplicative[8].

7 — Les résultats de l'enquête Timss sont consultables sur le site de l'IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement, https://timssandpirls.bc.edu).

8 — Miriam Bassok, "Semantic Alignments in Mathematical Word Problems", in Dedre Gentner, Keith J. Holyoak et Boicho N. Kokinov (Eds.), *The Analogical Mind: Perspectives from Cognitive Science*, Cambridge, MA, MIT Press, 2001.

La place de la résolution de problèmes

Aujourd'hui, il y a un consensus sur la place centrale que doit occuper la résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire comme au collège et dont le programme de mathématiques du cycle 3 se fait le relais : « la résolution de problèmes constitue le critère principal de la maîtrise des connaissances dans tous les domaines des mathématiques, mais elle est également le moyen d'en assurer une appropriation qui en garantit le sens[9] ».

Ce que l'on entend par « problèmes » peut être relativement large ; ce guide restera centré sur **la résolution des problèmes verbaux à données numériques**. Il s'agit de problèmes proposés sous forme d'un texte, éventuellement accompagné d'une illustration, contenant des données numériques qu'il faut mettre en relation et avec lesquelles il faut faire des opérations mathématiques pour obtenir ce qui permet de donner la ou les réponses à une question posée.

Les compétences clés à développer

L'aptitude des élèves à résoudre de tels problèmes va dépendre principalement de trois facteurs :

— **les connaissances mathématiques** des élèves[10] : ils doivent en effet identifier les nombres en jeu dans l'énoncé et leur nature (entiers, fractions, décimaux), quelle que soit leur écriture (en lettres, en chiffres, avec ou sans virgule, sous forme fractionnaire), connaître le sens des opérations qu'ils vont devoir mobiliser, maîtriser des moyens d'effectuer les calculs nécessaires, mentalement ou par écrit, etc. ;
— **la mémoire de problèmes similaires** préalablement résolus[11] : les enfants comme les adultes s'appuient largement sur leur mémoire pour résoudre des problèmes. L'évocation en mémoire de problèmes pouvant aider à la résolution d'un nouveau problème relève du transfert d'apprentissage, qui dépend de facteurs nombreux et complexes[12]. Certains problèmes deviennent si familiers que leur traitement

9 — Programme consolidé du cycle 3, BOENJS n° 31 du 30 juillet 2020 (https://eduscol.education.fr/87/j-enseigne-au-cycle-3).
10 — *Tous égaux face aux équations ? Rendre les mathématiques accessibles à tous*, Pisa, Éditions OCDE, Paris, 2016.
11 — Marsha C. Lovett, "Problem Solving", in Hal Pashler, Douglas Medin (eds.), *Stevens' Handbook of Experimental Psychology: Memory and Cognitive Processes*, John Wiley & Sons Inc, New York, 2002.
12 — Susan Barnett, Stephen Ceci, « When and Where Do We Apply What We Learn? A Taxonomy for Far Transfer », *Psychological bulletin*, n° 128, 2002.

est quasi automatisé, alors que pour d'autres le traitement peut faire appel à une combinaison complexe de méthodes utilisées dans divers problèmes, avec une adaptation à la situation du problème. Dans les deux cas, cela pose la question de l'accès en mémoire à des situations pertinentes par rapport à la résolution du problème en cours. En effet, des travaux sur le transfert d'apprentissage ont montré que la manière dont l'élève va se représenter le problème résolu conditionnera la possibilité que ce problème soit évoqué à bon escient pour soutenir une résolution future[13] ;

— **des compétences et des aptitudes diverses**, comme la confiance qu'ont les élèves en leur capacité à traiter les problèmes qui leur sont soumis, l'engagement dont ils font preuve pour chercher à résoudre le problème, la capacité à lire et comprendre le problème qu'ils doivent traiter, l'aptitude à collaborer avec d'autres élèves pour effectuer une résolution de problèmes à plusieurs, l'aptitude à organiser et structurer leur travail, etc. On note dans le cadre de ces compétences transverses l'importance des quatre piliers de l'apprentissage[14] que sont l'attention, l'engagement actif, le retour sur les erreurs et la consolidation, sur lesquels s'appuie la résolution de problèmes et qu'elle contribue à développer. Ce sont ces aptitudes coordonnées avec leurs connaissances mathématiques et la mémoire de problèmes résolus qui leur permettront d'aborder sereinement, et de résoudre, des problèmes qui ne ressemblent pas à ceux qu'ils ont traités précédemment.

L'objectif de ce guide

L'objectif de ce guide est de fournir des éléments aux formateurs et aux professeurs pour développer un enseignement permettant d'améliorer les compétences des élèves de cours moyen en résolution de problèmes. Pour cela, ce guide :

— rappelle des éléments issus de la recherche permettant de nourrir la réflexion pour construire un enseignement de la résolution de problèmes plus efficace ;
— donne de nombreux exemples de problèmes (plus de 200) que les élèves de cours moyen doivent apprendre à résoudre, ainsi que des stratégies et procédures qu'ils doivent acquérir pour y parvenir ;
— propose des exemples concrets de mise en œuvre de séquences et de séances d'enseignement permettant de renforcer les compétences des élèves en résolution de problèmes.

13 — Laura Novick, "Analogical Transfer, Problem Similarity, and Expertise", *Journal of Experimental Psychology. Learning, Memory, and Cognition*, n° 14, 1988.
14 — Stanislas Dehaene, *Apprendre ! Les talents du cerveau, le défi des machines*, Odile Jacob, 2018.

Plan du guide

La pratique de la résolution de problèmes des élèves de cours moyen se limite trop souvent au traitement de problèmes en une étape. Ceux-ci ne permettent pas de proposer une variété de situations et donc de stratégies de résolution suffisantes.

De plus, ils peuvent instiller, dans l'esprit des élèves, l'idée que « résoudre un problème, c'est trouver la bonne opération » et entraîner des résolutions ne s'appuyant plus sur le sens, mais sur des stratégies préjudiciables telles que l'appui sur des mots inducteurs ou sur des relations entre les entités présentes dans l'énoncé mais en déphasage avec la structure mathématique, ou même sur un choix aléatoire, laissant supposer que la réussite dans ce domaine d'apprentissage est avant tout une question de chance.

Le chapitre 1 propose une classification des problèmes, s'appuyant notamment sur des travaux de Catherine Houdement, qui distingue les problèmes en une étape des autres problèmes. Ces derniers, qualifiés ici de problèmes en plusieurs étapes et de problèmes atypiques, sont, en complément des précédents, essentiels pour la formation des élèves afin de s'assurer du bon développement de leurs compétences en résolution de problèmes.

Le chapitre 2 propose une décomposition du processus de résolution de problèmes en quatre phases s'appuyant sur des travaux de Lieven Verschaffel et Erik de Corte. La connaissance de ces quatre phases est essentielle pour analyser les réponses des élèves lors des séances de résolution de problèmes. Elle permet d'aller au-delà d'un constat binaire de réussite ou de non-réussite, afin de pouvoir apporter l'aide appropriée à chacun des élèves qui n'a pas résolu correctement un problème donné, en identifiant le plus précisément possible la nature des difficultés rencontrées.

L'analyse *a priori* d'un problème doit permettre au professeur d'établir s'il est pertinent de le proposer à tous les élèves de sa classe ou seulement à certains d'entre eux. Cette analyse repose sur une connaissance fine de tout ce qui peut faire obstacle au traitement du problème par les élèves. Ces quarante dernières années, de nombreux travaux de recherche ont apporté des éclairages sur ces obstacles.

Le chapitre 3 identifie les principaux éléments qui peuvent constituer une difficulté pour les élèves lors de la résolution de problèmes. La connaissance de ces éléments n'a pas pour objectif d'épurer les énoncés de tout ce qui rend un problème difficile à traiter pour les élèves, mais au contraire de les y confronter, au moment opportun, pour qu'ils puissent développer les connaissances, les savoir-faire et les aptitudes leur permettant de franchir ces obstacles.

En s'appuyant sur les trois premiers chapitres, **le chapitre 4** donne des pistes et des outils concrets pour construire un enseignement permettant de développer et de renforcer les compétences des élèves en résolution de problèmes. Il présente à la fois des lignes directrices générales pour la construction de séquences et des exemples simples et concrets de séances d'enseignement ou de temps particuliers au sein de ces séances d'enseignement. Enfin, ce chapitre recense différents modes de représentation des données d'un énoncé (schémas en barres, déplacements sur une droite, tableaux, arbres) destinés à aider les élèves lors de la résolution de problèmes.

Le chapitre 5 est centré sur la liaison école-collège. Il permet de compléter les exemples de problèmes des chapitres précédents pouvant être proposés aux élèves de cours moyen. Il permet également de montrer comment les apprentissages de cours moyen, en particulier en ce qui concerne les représentations, peuvent être réinvestis dans la suite de la scolarité, lors de la résolution de problèmes rencontrés au collège. Ce chapitre est destiné à nourrir les échanges dans le cadre de travaux autour de la liaison CM2-6^e.

Ces chapitres peuvent se lire de façon indépendante. Les trois premiers sont plutôt centrés sur la didactique, le quatrième sur la pédagogie et le dernier sur la liaison école-collège. Un formateur pourra privilégier une lecture fine des trois premiers chapitres avant d'aborder la lecture du chapitre 4, alors qu'un professeur pourra choisir de commencer directement par la lecture du chapitre 4 puis lire ultérieurement, en fonction de ses besoins d'éclairage, les trois premiers chapitres. Le chapitre 5 peut, quant à lui, être abordé indépendamment lors de travaux interdegrés.

Quels problèmes apprendre à résoudre au cours moyen ?

Au cours moyen, les élèves renforcent leur familiarité avec les problèmes en une ou plusieurs étapes traités au cycle 2, en se confrontant à des problèmes structurellement très proches, mais dont la difficulté s'accroit. Ces problèmes mettent désormais en jeu les nouveaux nombres étudiés à ce niveau de la scolarité : « grands nombres », nombres décimaux, fractions; les contextes des énoncés se diversifient, en intégrant progressivement des éléments moins familiers pour les élèves.

La structure des problèmes proposés va également se complexifier, avec la rencontre de problèmes constitués d'étapes plus nombreuses qu'au cours élémentaire, ou de problèmes nécessitant le déploiement de stratégies particulières.

Une catégorisation en trois types de problèmes

Ces quarante dernières années, de nombreuses classifications des problèmes verbaux à données numériques ont été proposées par des chercheurs. Ce qui les différencie est la focale qui est mise sur telles ou telles caractéristiques et qui justifie tantôt de regrouper ensemble certains énoncés et tantôt de les distinguer comme relevant de deux catégories différentes.

Élaborer une telle classification est un travail complexe, tant le champ des problèmes mathématiques est vaste et riche. Quand on se réfère à une classification existante, il est en général aisé d'identifier des problèmes « exceptions » qui n'entrent dans aucune catégorie, ou que l'on peut faire entrer dans plusieurs. Ceci n'a cependant pas d'importance pour une exploitation d'une classification pour l'enseignement, car **chercher à classer des problèmes n'est pas un objectif du travail à mener en classe avec les élèves.** Une classification de problèmes est en revanche un outil à disposition des professeurs pour cerner et organiser la diversité des problèmes que les élèves doivent rencontrer à un certain niveau de la scolarité et qu'ils doivent apprendre à résoudre à ce niveau de la scolarité. L'objectif de ce chapitre est de **définir le périmètre des problèmes devant être proposés au cours moyen et donc d'aider les professeurs à structurer l'enseignement de la résolution de problèmes** dans leur classe, en leur proposant un inventaire organisé de catégories de problèmes à traiter sur les deux années du cours moyen. La tâche des élèves doit être de résoudre des problèmes et non de les classer ; les élèves n'auront donc pas besoin d'apprendre ou d'entendre qu'un problème appartient à l'une ou l'autre des catégories mentionnées dans ce chapitre pour le résoudre, mais ils devront apprendre à faire des liens et repérer des analogies leur permettant de mobiliser des stratégies de résolution rencontrées précédemment.

Une classification des problèmes en trois catégories principales, fortement inspirée des travaux de Catherine Houdement[15], est proposée dans ce guide. Elle doit permettre d'aider les professeurs à structurer l'enseignement de la résolution de problèmes dans leur classe. Les trois catégories principales sont les suivantes :

— **les problèmes en une étape** : il s'agit des problèmes qui vont se traiter en effectuant une unique opération. On peut distinguer parmi ceux-ci, d'une part, les problèmes additifs qui nécessitent une addition ou une soustraction et, d'autre part, les problèmes multiplicatifs qui se traitent en effectuant une multiplication ou une division ;
— **les problèmes en plusieurs étapes** : il s'agit de problèmes qui vont se traiter comme une succession de problèmes en une étape, chacune déterminant des éléments intermédiaires qui vont permettre d'aboutir à la solution recherchée ;
— **les problèmes atypiques** : il s'agit des problèmes verbaux à données numériques dont la résolution est possible au cours moyen et qui ne rentrent pas dans les catégories des problèmes en une ou plusieurs étapes mentionnées précédemment. Le fait de les qualifier d'atypiques ne signifie pas qu'il n'y a pas de stratégies à faire acquérir pour pouvoir les résoudre. Bien au contraire, des sous-catégories clairement identifiées permettront d'enseigner des méthodes de résolution que les élèves doivent connaître.

Il existe une catégorie de problèmes particuliers, mentionnée explicitement dans le programme de cycle 3 : **les problèmes de proportionnalité**. Ils sont considérés dans ce guide comme des problèmes multiplicatifs en une étape, comme cela est le cas habituellement dans les articles de recherche[16], dans la mesure où leur traitement nécessite généralement une unique multiplication entre un rapport et une grandeur.

Exemple :

« *Un marcheur parcourt 2 km en 20 minutes.*
Combien de temps ce marcheur mettra-t-il pour parcourir 6 km en continuant à marcher à la même vitesse ? »

Pour ce problème de proportionnalité, la procédure la plus efficace consiste à multiplier la durée de 20 minutes par 3 ; 3 étant le rapport qui permet de passer de 2 km à 6 km, rapport qui est évident pour un élève de cours moyen, 6 km étant le triple de 2 km.

Cependant, en pratique, au cours moyen, les élèves ont souvent besoin d'effectuer deux étapes de calcul, comme l'illustre l'exemple suivant :

« *Dans une recette pour 4 personnes, il faut 75 g de beurre. Pour un banquet, un restaurateur doit préparer ce plat pour 92 personnes.*
Quelle masse de beurre sera nécessaire pour préparer ce plat pour le banquet ? »

15 — Catherine Houdement, « Résolution de problèmes arithmétiques à l'école », *Grand N*, n° 100, Irem de Grenoble, 2017.
16 — Jean-Pierre Levain, « La résolution de problèmes multiplicatifs à la fin du cycle primaire », *Educational Studies in Mathematics*, n° 23, 1992.

Pour résoudre ce problème, il suffit de connaître le rapport permettant de passer de 4 personnes à 92 personnes. Pour déterminer ce rapport, les élèves de cours moyen effectuent généralement la division 92 ÷ 4[17], en cherchant la moitié de la moitié de 92 ou en posant l'opération. Une fois établi que 92 ÷ 4 = 23, et donc qu'il y a 23 fois plus de personnes au banquet que de personnes prévues pour la recette, les élèves effectuent une seconde étape consistant à multiplier 75 g par 23.

On note par ailleurs que les problèmes en une étape nécessitant une multiplication comme celui ci-dessous sont bien souvent des cas particuliers de problèmes de proportionnalité, pour lesquels la valeur pour une unité est donnée, et la valeur du rapport évoqué ci-dessus est évidente :

> « *Une boîte de six œufs coûte 2,30 €. Combien vont coûter 5 boîtes d'œufs ?* »

Dans ce guide, les problèmes de proportionnalité sont traités comme une catégorie à part et assez peu abordés, des documents ressources spécifiques sur le sujet étant disponibles sur le site Éduscol[18].

Les parties qui suivent proposent, à l'intérieur de chacune des trois catégories retenues, une classification plus détaillée des types de problèmes que les élèves doivent apprendre à résoudre au cours moyen. Cette organisation est résumée dans le graphique ci-dessous. Elle doit permettre d'aider les professeurs à structurer l'enseignement de la résolution de problèmes dans leur classe.

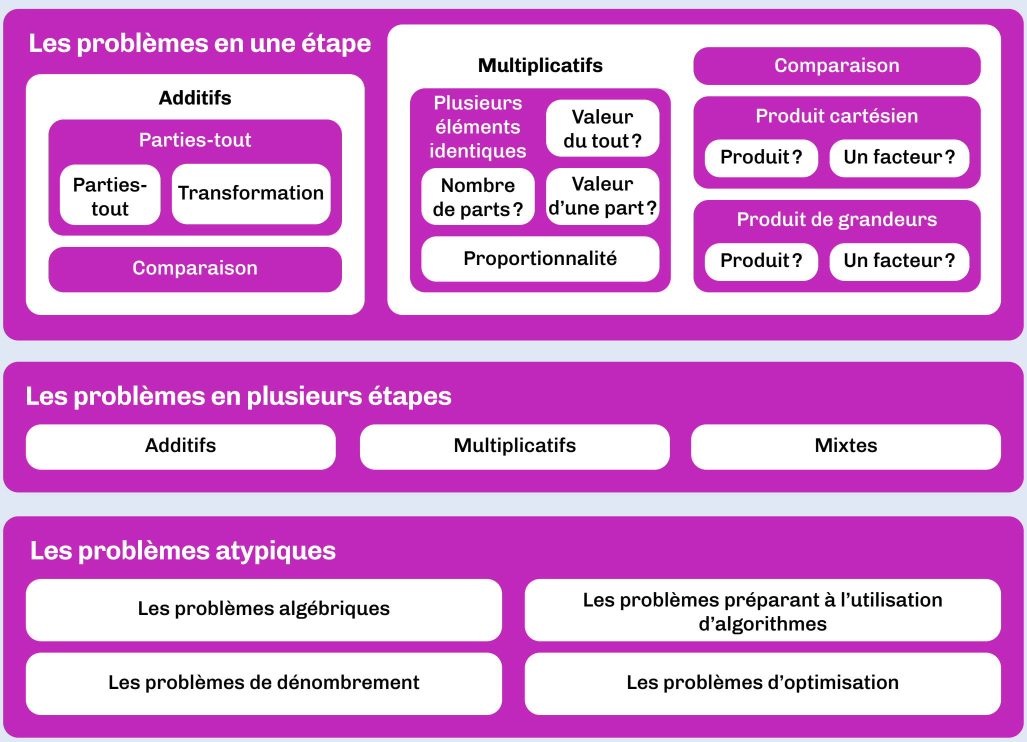


Figure 1. Une classification des problèmes que les élèves doivent apprendre à résoudre au cours moyen.

17 — Dans ce guide, l'obélus « ÷ » sera utilisé comme symbole pour la division, afin de distinguer ce symbole de celui utilisé pour les ratios « : » dans les paragraphes sur la liaison avec le collège.
18 — https://eduscol.education.fr/251/mathematiques-cycle-3

Les problèmes en une étape

Les problèmes en une étape sont les problèmes verbaux à données numériques qui se traitent en effectuant une des quatre opérations (addition, soustraction, multiplication ou division). La modélisation d'un de ces problèmes consiste donc à reconnaître qu'il peut être résolu grâce à une unique opération, en l'identifiant correctement. Une fois le calcul effectué, le résultat doit être réinjecté dans la situation, après une éventuelle interprétation, pour pouvoir conduire à la réponse au problème.

Les quatre problèmes ci-dessous, proposés par Catherine Houdement[19], sont des exemples de problèmes en une étape.

— **Problème 1** : « *Un massif de fleurs est formé de 60 tulipes rouges et de 15 tulipes noires. Combien y a-t-il de tulipes dans ce massif ?* »
— **Problème 2** : « *Un massif est formé de 60 rangées, toutes de 15 tulipes. Combien y a-t-il de tulipes dans ce massif ?* »
— **Problème 3** : « *Un massif de 60 fleurs est composé de tulipes et de 15 jonquilles. Combien y a-t-il de tulipes dans ce massif ?* »
— **Problème 4** : « *60 tulipes sont disposées en 15 massifs tous identiques. Combien y a-t-il de tulipes dans un massif ?* »

Ces problèmes parlent tous de massifs de fleurs et de tulipes et contiennent, tous, les nombres 60 et 15. Cependant la modélisation conduit, pour chacun d'eux, à la mobilisation d'une opération différente. Un adulte modélise, de façon quasi-automatisée, ces types de problèmes en s'appuyant sur sa compréhension de la situation, sur ses connaissances mathématiques et sur sa mémoire de modèles de problèmes déjà résolus. Au cours moyen, ces automatisations sont encore en cours de construction et ont besoin d'être travaillées en faisant des liens explicites avec les problèmes déjà résolus, en s'appuyant notamment sur des schémas qui permettent de mettre en évidence des similitudes structurales entre les problèmes. Comme l'illustrent ces situations, les liens entre les entités présentes dans l'énoncé (tulipes, jonquilles, fleurs, massifs, rangées) ne sont pas sans effet sur la difficulté à résoudre le problème ; ils peuvent, selon les cas, faciliter ou non l'évocation de l'opération mathématique qu'il faut faire pour résoudre le problème. Des travaux de psychologie expérimentale faisant appel à des « *techniques d'amorçage* » ont ainsi montré que la paire (orange, pomme) amorce une addition contrairement à la paire (orange, panier)[20]. Le chapitre 3 revient en détail sur ces indices présents dans les énoncés et leur prise en compte pour l'enseignement de la résolution de problèmes.

19 — *Ibid*, p. 17, note 15.
20 — Miriam Bassok, Samuel Pedigo, An Oskarsson, "Priming Addition Facts With Semantic Relations", *Journal of Experimental Psychology. Learning, Memory, and Cognition*, n° 34, 2008.

Les problèmes en une étape ont fait l'objet de nombreuses études à partir des années 1980, notamment pour établir des classifications[21]. Ces classifications ne sont pas destinées aux élèves et ne doivent pas être enseignées ; un tel enseignement pourrait nuire à la construction d'un sens suffisamment général pour chaque opération et pour les liens entre ces opérations. Leur fonction principale est de permettre aux professeurs de s'assurer qu'ils confrontent effectivement les élèves à l'ensemble des situations possibles, sans se limiter à quelques situations prototypiques, et de pouvoir anticiper la difficulté des problèmes proposés aux élèves. Elles permettent également de s'appuyer sur des problèmes résolus antérieurement par les élèves pour faciliter la résolution de nouveaux problèmes plus difficiles, en travaillant les points communs qui peuvent être repérés entre ces différentes classes de problèmes, et ainsi faciliter le transfert d'apprentissage.

On considère généralement deux catégories de problèmes en une étape :

- **les problèmes additifs**, pour lesquels il va falloir additionner ou soustraire deux nombres, ou plus[22], de l'énoncé ;
- **les problèmes multiplicatifs**, pour lesquels il va falloir multiplier ou diviser deux nombres de l'énoncé.

Il est préférable de se limiter à ces deux catégories sans chercher à distinguer les problèmes selon l'opération en jeu ; on évitera, par exemple, de parler de problèmes d'addition ou de problèmes de soustraction. En effet, les élèves en réussite sont ceux qui peuvent passer aisément d'une opération à l'autre à l'intérieur de ces deux grandes catégories. Ainsi, pour un problème les conduisant au calcul 65 – 58, les élèves en réussite n'effectuent pas forcément la soustraction, mais recherchent plutôt le complément dans une addition à trou 58 + ? = 65, et inversement pour une addition à trou comme 5 + ? = 102, ils effectuent plutôt la soustraction 102 – 5. L'utilisation flexible de l'une ou l'autre opération en fonction des nombres en jeu est un indicateur d'une bonne connaissance des opérations. Par exemple, la faculté de passer indifféremment d'une addition à trou à une soustraction et vice-versa est une marque de la compréhension du fait que l'addition et la soustraction sont deux opérations réciproques l'une de l'autre. Cette flexibilité peut être d'autant plus intéressante à travailler avec des énoncés qui orientent vers tel ou tel calcul. Pour reprendre le contexte précédent, un énoncé tel que « *Il y a 65 tulipes. 58 sont cueillies. Combien reste-t-il de tulipes ?* » oriente plus vers une soustraction que l'énoncé « *Il y a 65 tulipes. Après la cueillette, il en reste 58. Combien de tulipes*

21 — Mary Riley, James Greeno, Joan Heller, "Development of Children's Problem Solving Ability in Arithmetic", in Herbert P. Ginsburg, *The Development of Mathematical Thinking*, Academic Press, New York, 1983. Gérard Vergnaud, "A Classification of Cognitive Tasks and Operations of Thought Involved in Addition and Subtration Problems", dans Thomas P. Carpenter, James M. Moser, Thomas A. Romberg (eds.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective*, Hillsdale: Erlbaum, 1982.

22 — On peut ajouter plus de deux nombres dans les problèmes à une étape (« *Lou a 6 billes rouges, 8 billes vertes et 13 billes bleues. Combien Lou a-t-elle de billes ?* »).

ont été cueillies ? », qui lui oriente vers une addition ou une soustraction à trou. Il y a un enjeu fort d'apprentissage à ce que les élèves puissent être flexibles dans le choix de leur stratégie de calcul[23].

Les problèmes en une étape sont en quelque sorte les briques élémentaires formant la plupart des problèmes verbaux que vont devoir résoudre les élèves de cours moyen.

Les problèmes additifs

Les problèmes additifs en une étape ont fait l'objet d'une classification assez précise dès le début des années 1980 par Riley *et al.*[24]. Chacun des cas de cette classification est accompagné des taux de réussite d'élèves d'écoles primaires américaines, de l'équivalent de la grande section (5 ans) au CE2 (8 ans). Une traduction en français d'une partie de cette classification est fournie dans le tableau ci-après[25].

TYPES DE PROBLÈMES		TAUX DE RÉUSSITE			
PROBLÈMES DE CHANGEMENT		Mat.	CP	CE1	CE2
Changement 1	X avait 3 billes. Puis Y lui a donné 5 billes. Combien de billes a maintenant X ?	0,87	1,00	1,00	1,00
Changement 2	X avait 8 billes. Puis il a donné 5 billes à Y. Combien de billes a maintenant X ?	1,00	1,00	1,00	1,00
Changement 3	X avait 3 billes. Y lui en a donné. X a maintenant 8 billes. Combien de billes Y a-t-il donné à X ?	0,61	0,56	1,00	1,00
Changement 4	X avait 8 billes. Il en a donné à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien a-t-il donné de billes à Y ?	0,91	0,78	1,00	1,00
Changement 5	X avait des billes. Y lui en a donné 5 de plus. Maintenant X a 8 billes. Combien X avait-il de billes ?	0,09	0,28	0,80	0,95
Changement 6	X avait des billes. Il en a donné 5 à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien avait-il de billes ?	0,22	0,39	0,70	0,80

23 — Lieven Verschaffel, Koen Luwel, Joke Torbeyns, Wim Dooren, "Conceptualizing, Investigating, and Enhancing Adaptive Expertise in Elementary Mathematics Education", *European Journal of Psychology of Education*, n° 24, 2009.
24 — *Ibid*, p. 20, note 21.
25 — Michel Fayol, Catherine Thevenot, Michel Dévidal, « La résolution de problèmes », dans Marie-Pascale Noël, *La Dyscalculie : trouble du développement numérique de l'enfant*, Solal, 2005.

TYPES DE PROBLÈMES		TAUX DE RÉUSSITE			
PROBLÈMES DE COMBINAISON					
Combinaison 1	X a 3 billes. Y a 5 billes. Combien X et Y ont-ils de billes ensemble ?	1,00	1,00	1,00	1,00
Combinaison 2	X et Y ont ensemble 8 billes. X a 3 billes. Combien Y a-t-il de billes ?	0,22	0,39	0,70	1,00
PROBLÈMES DE COMPARAISON					
Comparaison 1	X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien X a-t-il de billes de plus que Y ?	0,17	0,28	0,85	1,00
Comparaison 2	X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien Y a-t-il de billes de moins que X ?	0,04	0,22	0,75	1,00
Comparaison 3	X a 3 billes. Y a 5 billes de plus que X. Combien Y a-t-il de billes ?	0,13	0,17	0,80	1,00
Comparaison 4	X a 8 billes. Y a 5 billes de moins que X. Combien Y a-t-il de billes ?	0,17	0,28	0,90	0,95
Comparaison 5	X a 8 billes. Il a 5 billes de plus que Y. Combien Y a-t-il de billes ?	0,17	0,11	0,65	0,75
Comparaison 6	X a 3 billes. Il a 5 billes de moins que Y. Combien Y a-t-il de billes ?	0,00	0,06	0,35	0,75

Figure 2. Classification de Riley *et al*.

Les classifications produites au début des années 1980 ont ainsi permis de mettre en lumière que l'opération en jeu n'était pas la seule difficulté des problèmes arithmétiques. La résolution du problème « *Paul avait 3 billes. Puis Pierre lui a donné 5 billes. Combien de billes a Paul maintenant ?* » (du type « changement 1 » dans le tableau ci-dessus) ne pose généralement pas de difficultés aux élèves de première année d'école élémentaire, tandis que le problème « *Paul avait des billes. Il en a donné 5 à Pierre. Maintenant, Paul a 3 billes. Combien Paul avait-il de billes ?* » (du type « changement 6 » dans le tableau ci-dessus) pose encore des difficultés aux élèves en troisième année d'école élémentaire, alors que pour les deux problèmes la même opération 5 + 3 est attendue.

Au-delà du type de problème issu de cette classification, de nombreux autres facteurs peuvent également être sources de difficultés pour les élèves. Le chapitre 3 permet d'explorer un certain nombre d'entre eux.

Dans la suite de ce guide, deux sous-catégories seront considérées pour les problèmes additifs :

— D'une part, **les problèmes de parties-tout** : ce sont des problèmes où deux parties distinctes (parfois plus) forment ensemble un tout. Il est à noter que les parties peuvent être statiques (billes rouges/billes bleues) ou dynamiques dans le cadre d'une transformation (billes gagnées ou perdues/billes restantes).

Exemples :

- « *Une pastèque et un ananas pèsent ensemble 3,350 kg. La pastèque pèse 2,850 kg.*
  Quelle est la masse de l'ananas ? »
- « *Une bouteille contient 0,5 L d'eau. On ajoute un quart de litre d'eau dans la bouteille.*
  Quel volume d'eau la bouteille contient-elle maintenant ? »

Ce regroupement entre les problèmes de combinaison statique et de transformation dynamique en une seule catégorie ne va pas de soi. Il suppose en effet qu'un état initial et une évolution temporelle puissent être assimilés à des parties d'un ensemble et qu'un état final puisse être assimilé à une totalité. Cette possibilité a l'intérêt de conduire à ce que les énoncés qui relèvent des catégories de problèmes de combinaison et de changement puissent se prêter à une représentation commune. Elle peut paraître relativement simple pour certains élèves, mais peut avoir besoin d'être travaillée avec d'autres. Ainsi, bien que pouvant être résolu par une simple addition, le problème « *Léa avait des billes. Elle perd 4 billes à la récréation. Il lui reste 3 billes. Combien Léa avait-elle de billes au début de la récréation ?* » n'est réussi que tardivement à l'école primaire, comme l'indique le tableau précédent, car sachant ce qui a été perdu et ce qu'il reste, cela n'a rien d'évident de « remonter le temps » pour trouver la quantité d'origine par une addition. Cela ne va pas nécessairement de soi de concevoir la quantité initiale comme un tout ayant pour parties ce qui a été perdu et ce qui reste. En revanche, l'énoncé « *Léa avait des billes bleues et des billes rouges. Elle perd ses 4 billes rouges à la récréation. Il lui reste ses 3 billes bleues. Combien Léa avait-elle de billes au début de la récréation ?* » induit une partition en deux sous-ensembles qui aide à percevoir la quantité de départ comme somme de billes perdues (rouges) et restantes (bleues). La présence des couleurs rend saillant un codage alternatif d'union de deux parties pour trouver un tout, et cet énoncé est bien mieux réussi que le précédent[26].

— D'autre part, **les problèmes de comparaison,** au sein desquels deux entités sont mises en relation, sont comparées.

  Exemple : « *Une bouteille contient 0,75 L d'eau. Un verre contient un demi-litre d'eau de moins que la bouteille. Quel volume d'eau le verre contient-il ?* »

Afin d'unifier au maximum la représentation des problèmes additifs, certains chercheurs proposent de représenter les problèmes de comparaison selon un format parties-tout[27] ; ce choix ne sera pas retenu dans la suite de ce guide, car il implique un niveau d'abstraction élevé afin de considérer l'écart comme une partie virtuelle. Un format distinct de schématisation où les grandeurs comparées sont représentées par deux ensembles distincts sera utilisé, comme cela est développé au chapitre 4.

26 — Emmanuel Sander, Jean-François Richard, « Les apprentissages numériques », dans Raphaële Miljkovitch, Françoise Morange-Majoux, Emmanuel Sander (dir.), *Psychologie du développement*, Elsevier-Masson, Paris, 2017.
27 — Catherine Sophian, *The Origins of Mathematical Knowledge in Childhood*, Routledge, New York, 2007.

Les problèmes multiplicatifs

Les problèmes multiplicatifs en une étape ont fait l'objet de moins de recherches que les problèmes additifs. Il apparaît néanmoins que le type de problème, la nature des grandeurs en jeu (quantités, longueurs, prix, masses, etc.), les ensembles auxquels appartiennent les nombres en jeu dans l'énoncé (entiers, décimaux, fractions), les liens qu'entretiennent entre eux ces nombres, ainsi que l'opération attendue (multiplication ou division) ont un impact sur la réussite des élèves[28].

Les compétences en calcul des élèves ont évidemment aussi une influence sur l'aisance avec laquelle les problèmes multiplicatifs seront résolus. Voici pour mémoire les attendus institutionnels concernant le calcul posé[29] :

	Multiplication	**Division**
Cycle 2	Multiplication d'un nombre entier à deux ou trois chiffres par un nombre entier à un ou deux chiffres.	
CM1	Multiplication de deux nombres entiers.	Division euclidienne de deux nombres entiers.
CM2	Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier.	Division décimale de deux nombres entiers. Division d'un nombre décimal par un nombre entier.
6e	Multiplication de deux nombres décimaux.	

D'autres modes de calcul et en particulier le calcul mental ou en ligne, avec un éventuel appui sur des faits numériques mémorisés ou la manipulation de matériel de numération ou l'utilisation de dessins, schémas ou tableaux peuvent permettre de résoudre des problèmes multiplicatifs en une étape, au cours moyen comme au cycle 2, avant que les algorithmes de calcul posé n'aient été introduits.

LES PROBLÈMES DANS LESQUELS UNE MÊME GRANDEUR (QUANTITÉ, LONGUEUR, MASSE, ETC.) APPARAÎT UN CERTAIN NOMBRE DE FOIS

Au cycle 3 comme au cycle 2, la plupart des problèmes multiplicatifs correspondent à des situations mettant en jeu une même grandeur un certain nombre de fois. Ces problèmes mettent généralement en jeu trois données numériques, dont deux sont connues :

— le nombre de parts, le nombre de fois où la grandeur apparaît ;
— la valeur d'une part, la mesure de la grandeur qui apparaît (quantité, longueur, masse, volume, etc.) et qui est répétée ;
— la valeur totale, la valeur de la grandeur au total, en prenant en compte le nombre de fois où la grandeur apparaît.

28 — *Ibid*, p. 17, note 16.
29 — Attendus de fin d'année et repères annuels de progression pour les cycles 2 et 3, https://eduscol.education.fr/137/attendus-de-fin-d-annee-et-reperes-annuels-de-progression-du-cp-la-3e

Ces trois données sont liées par la relation :

le nombre de parts x la valeur d'une part = la valeur totale.

Le problème consiste à trouver un des trois nombres à partir des deux autres. Si on cherche la valeur totale, il faut faire une multiplication. Si on cherche le nombre de parts ou la valeur d'une part, il faut effectuer une division.

TROIS EXEMPLES DE PROBLÈMES MULTIPLICATIFS

Voici trois exemples de problèmes pour lesquels il faut effectuer une multiplication :

— *« Arthur a acheté 6 bouteilles d'huile de 0,75 L. Quel volume d'huile a-t-il acheté ? »*
— *« En configuration football, le Stade de France a une capacité de 80 698 places. Quelle sera la recette maximale d'un match pour lequel toutes les places sont vendues à 17 € ? »*
— *« En vitesse de croisière, l'Airbus A330 vole à 860 km/h. Quelle distance parcourt-il à cette vitesse en trois heures et demi ? »*

Dans ces problèmes, les éléments en jeu sont les suivants :

	Nombre de parts	Valeur d'une part	Valeur totale
Arthur	Nombre de bouteilles : 6	Volume d'huile dans une bouteille : 0,75 L	Volume d'huile au total dans les 6 bouteilles : 4,5 L
Stade de France	Nombre de places dans le Stade de France : 80 698	Prix d'une place : 17 €	Recette totale si les 80 698 places sont vendues : 1 371 866 €
A330	Nombre d'heures de vol : 3,5	Distance parcourue en une heure : 860 km	Distance parcourue en 3,5 heures : 3 010 km

Au cycle 2, les élèves peuvent souvent trouver le résultat d'un problème relevant de la multiplication en effectuant une ou plusieurs additions. Les professeurs sont alors amenés à augmenter la valeur des nombres en jeu afin d'encourager l'utilisation de la multiplication. La même action, c'est-à-dire de ne pas se restreindre à des scénarios pour lesquels la résolution par quelques additions mène à la solution, est à encourager au cours moyen ; elle est facilitée par l'augmentation du champ numérique maîtrisé par les élèves et la généralisation de l'algorithme de multiplication posée à l'ensemble des entiers au début du CM1.

Il est à noter que ces problèmes sont fréquemment des problèmes de proportionnalité pour lesquels la valeur pour une unité est donnée. Par exemple, pour le problème d'Arthur ci-dessus, le volume d'huile dans 1 bouteille est donné. Il convient de faire percevoir la présence de cette relation de proportionnalité[30], au cours élémentaire comme au cours moyen, en verbalisant cette relation : « *Dans 1 bouteille, il y a 0,75 litre d'huile, donc si j'achète 6 fois plus de bouteilles, j'aurai 6 fois plus d'huile*

30 — *Ibid*, p. 17, note 16.

donc 6 x 0,75 litres. » Cette vision d'un scalaire[31], correspondant au rapport entre le nombre de bouteilles achetées et 1 bouteille, multiplié par le volume d'une bouteille, est sans doute une façon assez simple pour lier les grandeurs en jeu dans le problème : 6 x 0,75 litre = 4,5 litres.

Les problèmes proposés ci-dessus peuvent être modifiés, en changeant ce qui doit être trouvé :

— On peut ainsi faire chercher **la valeur d'une part** : « *Arthur a acheté 6 bouteilles identiques d'huile d'olive. Il a ainsi acheté 4,5 L d'huile d'olive. Quelle est la contenance d'une bouteille d'huile d'olive ?* »
— On peut également inviter les élèves à trouver **le nombre de parts** : « *Arthur a acheté des bouteilles identiques d'huile d'olive. Chaque bouteille contient 0,75 L d'huile d'olive et il a acheté 4,5 L d'huile d'olive en tout. Quel est le nombre de bouteilles d'huile d'olive achetées par Arthur ?* »

Il est important de travailler à la fois des problèmes de recherche de la valeur d'une part et des problèmes de recherche du nombre de parts, les seconds étant en général plus difficiles à résoudre que les premiers, car non conformes à la conception intuitive de la division, qui oriente vers la recherche de la valeur de la part dans un scénario de partage[32]. Le lien fort entre les trois problèmes sur les bouteilles montre bien l'intérêt qu'il y a à travailler conjointement le sens de la multiplication et le sens de la division.

LES PROBLÈMES METTANT EN JEU UNE COMPARAISON MULTIPLICATIVE

Une deuxième catégorie de problèmes multiplicatifs est rencontrée par les élèves de cours moyen. Il s'agit des problèmes de comparaison multiplicative.

Exemple :

« Un terrain rectangulaire a une largeur de 78,7 m et une longueur 4 fois plus longue que la largeur.
Quelle est la longueur de ce terrain ? »

Les problèmes de comparaison conduisent parfois à des divisions, ce qui peut être source de difficultés pour les élèves qui s'appuient sur le mot clé « fois plus » comme induisant une multiplication. C'est le cas pour les trois problèmes ci-dessous :

— *« Un terrain rectangulaire a une longueur de 78,7 m et une largeur 4 fois plus courte que la longueur.*
Quelle est la largeur de ce terrain ? »

— *« Avant travaux, il y avait 550 places assises dans les tribunes du stade. Il y en a maintenant 1 650. Pierre dit qu'il y a maintenant 2 fois plus de places assises. A-t-il raison ? »*
— *« Une grande bouteille contient 5 fois plus de parfum qu'un flacon. La grande bouteille contient 0,75 L de parfum.*
Quel volume de parfum contient le flacon ? »

---

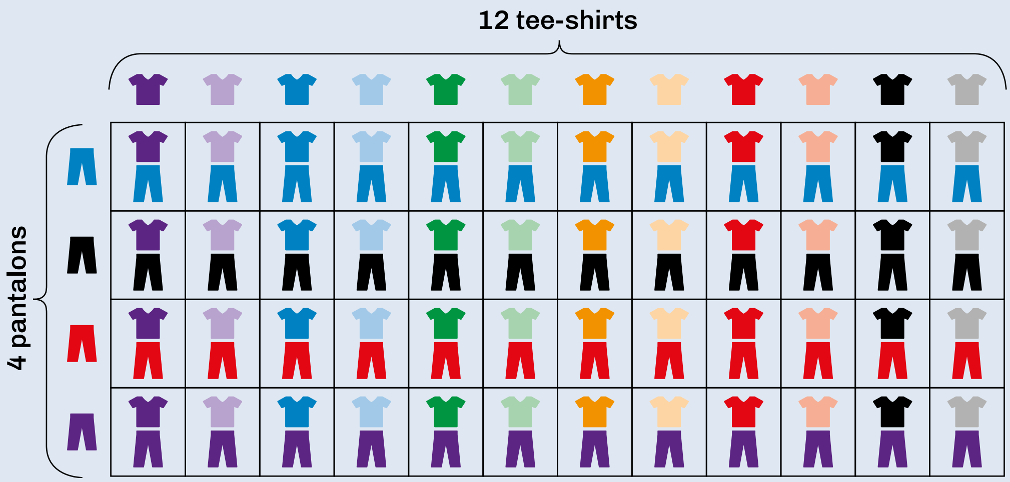
31 — Nombre sans unité.
32 — Efraim Fischbein, Maria Deri, Maria Nello, Maria Marino, "The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division", *Journal for Research in Mathematics Education*, n° 16, 1985.

De manière analogue, « fois moins » pourra conduire à une division ou une multiplication selon les cas.

LES PROBLÈMES METTANT EN JEU UN PRODUIT CARTÉSIEN

Le produit cartésien de deux ensembles est l'ensemble de tous les couples dont la première composante appartient au premier ensemble et la seconde au second ensemble. Par exemple : « *Une poupée est livrée avec 4 pantalons et 12 tee-shirts. De combien de façons est-il possible d'habiller la poupée ?* »

L'ensemble des solutions est l'ensemble des couples constitués d'un pantalon et d'un tee-shirt, c'est-à-dire l'ensemble des tenues complètes que l'on peut constituer. On peut représenter l'ensemble de ces solutions en construisant un arbre ou un tableau. Par exemple, le tableau ci-dessous donne toutes les tenues possibles pour la poupée et permet de les énumérer.



Ce problème peut être résolu en dénombrant les éléments du tableau, mais il peut aussi être résolu plus directement, sans passer par une énumération des différentes tenues. Ce problème est en effet un problème multiplicatif à une étape : la réponse au problème est apportée par la multiplication 12 x 4. Cependant, modéliser ce problème par une multiplication ne va pas de soi tant que la multiplication est simplement associée aux situations où une même quantité est répétée plusieurs fois : ici, l'énoncé ne fait pas apparaître de répétitions. Le tableau ci-dessus permet néanmoins de faire le lien avec le sens « addition itérée » de la multiplication : par exemple, on peut considérer que pour chacun des 12 tee-shirts, on peut choisir un des 4 pantalons, ce qui donne 12 x 4 tenues possibles. De plus, de la même manière, on peut considérer que pour chacun des 4 pantalons, on peut choisir un des 12 tee-shirts, ce qui donne 4 x 12 tenues possibles. Ces deux façons de choisir répondent bien au même problème ; on a donc 4 x 12 = 12 x 4.

Cet exemple illustre le fait que les problèmes impliquant des produits cartésiens sont généralement difficiles à résoudre pour les élèves, car ils sont en décalage avec la conception intuitive de la multiplication comme addition itérée[33]. Ils facilitent cependant la compréhension de la propriété de commutativité de la multiplication.

33 — *Ibid*, p. 26, note 32.

Le problème suivant, dans lequel une collection d'objets est organisée selon un quadrillage régulier, relève de la même catégorie de problèmes.

> « *Le salon est rectangulaire, son carrelage est composé de carreaux carrés tous de la même taille. Il y a 27 carreaux dans le sens de la largeur et 42 dans le sens de la longueur.*
> *Combien y a-t-il de carreaux sur le sol du salon ?* »

Chaque carreau du carrelage peut être identifié de façon unique par sa position dans le sens de la largeur (ligne) et sa position dans le sens de la longueur (colonne).

Réciproquement, la connaissance du tout et d'une des valeurs du produit cartésien permet de proposer des problèmes dans lesquels une division ou une multiplication à trou doit être menée.

— « *Le salon est rectangulaire, son carrelage est composé de carreaux carrés tous de la même taille. Il y a 1 134 carreaux en tout dans la pièce. Il y a 27 carreaux dans le sens de la largeur.*
Combien y a-t-il de carreaux dans le sens de la longueur ? »
— « *Une poupée est livrée avec 13 pantalons différents et des tee-shirts tous différents. Léo a trouvé que 91 tenues différentes sont possibles pour habiller la poupée.*
Combien de tee-shirts y a-t-il ? »

LES PROBLÈMES METTANT EN JEU UN PRODUIT DE DEUX GRANDEURS

Le produit cartésien précédent peut être généralisé au produit de deux grandeurs, comme dans l'exemple ci-dessous :

> « *Un terrain rectangulaire a une longueur de 38,7 m et une largeur de 15 m.*
> *Quelle est l'aire de ce terrain ?* »

Des problèmes impliquant des vitesses peuvent entrer dans cette catégorie, même s'ils sont le plus souvent traités comme des problèmes de proportionnalité.

> « *Un train roule à la vitesse constante de 258 km/h.*
> *Quelle distance va-t-il parcourir en un quart d'heure ?* »

Au collège, ces problèmes seront plus fréquents avec la rencontre de grandeurs quotients et de grandeurs produits (m/s, wattheure, kg/m^3, etc.). De façon analogue aux cas précédents, la recherche d'un des facteurs du produit conduit à effectuer une division.

> « *L'aire d'un rectangle est 259 cm^2. Sa largeur est 14 cm.*
> *Quelle est la longueur de ce rectangle ?* »

Les problèmes en plusieurs étapes

Les problèmes en plusieurs étapes sont les problèmes verbaux à données numériques nécessitant plusieurs calculs successifs (chaque calcul correspondant à une étape) pour obtenir le résultat cherché. Il n'y a pas de véritable tâtonnement pour ces problèmes, au sens d'essais, même si des choix peuvent être opérés, notamment sur le chemin à suivre pour obtenir le résultat. **Il est nécessaire de bien comprendre les relations entre les données de l'énoncé et ce qui est recherché, afin de construire un modèle mathématique de la situation** et d'organiser les différents calculs à mener. Il faut ensuite réaliser les calculs retenus et interpréter le résultat.

Les problèmes en plusieurs étapes sont un objectif majeur de l'enseignement de la résolution de problèmes verbaux à données numériques au cours moyen. Ils permettent de mieux s'assurer d'une compréhension satisfaisante par les élèves du sens des quatre opérations rencontrées à l'école élémentaire. En évitant de réduire la résolution de problèmes au fait de « trouver LA bonne opération », ils renforcent la centration des élèves sur la compréhension de l'énoncé et la modélisation du problème. La multiplicité des réponses possibles limite fortement la possibilité de choisir une opération au hasard et permet ainsi de renforcer la garantie de la maîtrise suffisante des connaissances et compétences requises lorsqu'un élève a trouvé la bonne réponse.

La difficulté des problèmes en plusieurs étapes n'est pas la simple somme des difficultés des sous-problèmes en une étape qui les composent. En effet, à cette somme s'ajoute la difficulté de la mise en relation de ces différents sous-problèmes élémentaires.

L'exercice issu de l'évaluation Timss 2015 proposé dans l'introduction est un problème en deux étapes.

> « *Une bouteille de jus de pomme coûte 1,87 zed.*
> *Une bouteille de jus d'orange coûte 3,29 zeds.*
> *Julien a 4 zeds.*
> *Combien de zeds Julien doit-il avoir en plus pour acheter les deux bouteilles ?* »

Une première étape peut consister à calculer le coût total des deux bouteilles (1,87 zed + 3,29 zeds) et la seconde étape conduit à calculer la différence entre la somme trouvée et 4 zeds. Ce problème peut être qualifié de problème additif en plusieurs étapes, car toutes les étapes consistent en des additions ou des soustractions.

Voici quelques exemples supplémentaires de problèmes en plusieurs étapes pouvant être rencontrés au cours moyen :

— « *Lydia achète 5 billets de cinéma à 7,30 €. Elle donne un billet de 50 € à l'employé de caisse.*
Combien celui-ci va-t-il lui rendre ? »

Pour ce problème en deux étapes, on peut commencer par calculer le prix à payer en effectuant une multiplication ou une addition puis, dans un deuxième temps, soustraire le résultat trouvé à 50 €.

— « *Hugo vient d'acheter un paquet d'un kilogramme de farine. Il utilise* $\frac{1}{4}$ *du paquet pour faire un gâteau et* $\frac{1}{10}$ *du paquet pour faire une sauce Béchamel.*
Quelle masse de farine reste-t-il dans le paquet ? »

On peut considérer que ce problème est en quatre étapes, puisqu'il peut se résoudre en cherchant la masse de farine utilisée pour le gâteau et la masse de farine utilisée pour la sauce Béchamel, puis la masse totale utilisée avant de calculer la masse restante dans le paquet (on peut aussi soustraire successivement les deux masses de farine utilisée au kilogramme initial).

— « *Un supermarché a commandé une palette de barquettes de fraises. La palette est constituée de douze étages de cageots et il y a 5 cageots sur chaque étage. Dans chaque cageot, il y a 12 barquettes de 400 g de fraises.*
Quelle masse de fraises y a-t-il sur la palette ? »

Ce problème est un problème multiplicatif en trois étapes, qui peuvent dépendre des choix faits lors de la modélisation. Il n'y a que des multiplications à réaliser.

Pour résoudre des problèmes en une étape, les élèves s'appuient généralement sur des problèmes similaires résolus précédemment. Ils développent ainsi des habiletés à traiter ces problèmes avec rapidité et efficacité. **Les problèmes en plusieurs étapes**, étant donné leur variété, obligent les élèves à élaborer leur propre stratégie conduisant à renforcer leurs habiletés de résolution de problèmes qui s'appuient notamment sur les connaissances développées en résolvant des problèmes en une étape : comprendre l'énoncé, chercher pour modéliser (faire des analogies, faire un schéma, faire des essais, expérimenter, essayer en remplaçant certaines valeurs numériques par d'autres plus simples, etc.), calculer et répondre. De façon symétrique, **la résolution de problèmes en plusieurs étapes va permettre de renforcer les habiletés de résolution de problèmes en une étape**.

Les problèmes en plusieurs étapes permettent aussi au professeur de mieux évaluer les compétences développées par les élèves, en limitant les faux positifs, c'est-à-dire les bonnes réponses obtenues par hasard ou encore en s'appuyant sur autre chose que la compréhension de la situation : utilisation de l'opération travaillée spécifiquement pendant la semaine ; opération choisie parce qu'elle est la mieux maîtrisée ; opération choisie en fonction d'un mot particulier de l'énoncé comme « plus », « moins » ou « fois » ; opération choisie en fonction des entités présentes dans le texte comme une division pour un énoncé mettant en scène des tables et des chaises, etc. En résumé, les problèmes en plusieurs étapes, de par leur diversité, limitent les résolutions s'appuyant principalement sur des indices non pertinents.

Les problèmes atypiques

Par définition, la catégorie des problèmes atypiques est la plus difficile à circonscrire. Elle comprend l'ensemble des problèmes verbaux à données numériques que doivent pouvoir traiter les élèves de cours moyen, et qui ne rentrent pas dans les catégories des problèmes en une ou plusieurs étapes mentionnées précédemment.

Cette catégorie de problèmes est la moins centrale au cours moyen. Elle est longuement développée dans ce paragraphe, car relativement complexe à circonscrire et à maîtriser. Cependant, la longueur de ce paragraphe ne doit être pas interprétée abusivement : le cœur de l'activité de résolution de problèmes au cours moyen est l'apprentissage de la résolution de problèmes en plusieurs étapes.

Il est bien évidemment impossible d'envisager tous les problèmes relevant de cette catégorie pouvant être proposés en classe de cours moyen, et *a fortiori* d'en proposer une classification exhaustive.

Outre les notions mathématiques en jeu, la résolution des problèmes atypiques doit permettre aux élèves de développer des compétences transversales, comme l'autonomie, la prise de décisions, la créativité, etc., qui leur seront utiles pour la suite de la scolarité et dans leur vie quotidienne. Elle doit aussi permettre aux élèves de rencontrer un certain nombre de stratégies et de types de raisonnements qu'ils pourront transposer, en les adaptant autant que nécessaire, dans la résolution d'autres problèmes atypiques.

S'il n'est pas possible de faire une classification exhaustive des problèmes atypiques que peuvent rencontrer des élèves de cours moyen, il existe néanmoins des familles de situations classiques que les élèves doivent avoir rencontrées. La rencontre de ces différentes familles ne doit pas être le fruit du hasard mais doit, au contraire, être parfaitement organisée de façon à ce que les élèves puissent faire le lien entre un problème à résoudre et un problème proche déjà traité précédemment, afin de s'inspirer de la méthode de résolution utilisée pour résoudre le nouveau problème qui leur est présenté. Pour que les élèves soient en mesure de mettre en œuvre, lors de la résolution de nouveaux problèmes, des stratégies déjà éprouvées avec succès lors de la résolution de problèmes antérieurement travaillés, **il est crucial de mettre l'accent sur des indices pertinents susceptibles de guider la mémorisation puis l'évocation de ces problèmes**.

Quatre familles de problèmes atypiques pour lesquelles les élèves doivent avoir bénéficié d'un enseignement leur permettant d'acquérir des stratégies et des outils pour les résoudre sont considérées dans ce qui suit :

— les problèmes algébriques ;
— les problèmes de dénombrement ;
— les problèmes préparant à l'utilisation d'algorithmes ;
— les problèmes d'optimisation.

Ces familles sont organisées de la plus fréquemment rencontrée à la plus rarement rencontrée au cours moyen. D'autres types de problèmes atypiques peuvent bien évidemment être proposés en classe afin que les élèves fassent preuve de créativité en mobilisant leurs connaissances pour construire des procédures de résolutions originales.

Les problèmes algébriques

Dans les exemples suivants, un problème mathématique de cours moyen sera considéré comme étant algébrique s'il peut être traité au cycle 4 par l'écriture et la résolution d'une ou de plusieurs équations du premier degré.

Exemple 1 : « *Dans un paquet de billes rouges, vertes ou bleues, il y a 162 billes. Il y a trois fois plus de billes rouges que de billes vertes et il y a 7 billes vertes de moins que de billes bleues. Combien y a-t-il de billes rouges ?* »

Au cycle 4, ce problème peut être traité en désignant par v le nombre de billes vertes. On en déduit qu'il y a $3v$ billes rouges et $(v + 7)$ billes bleues et on obtient l'équation à résoudre :

$$v + 3v + (v + 7) = 162$$

Différentes stratégies de résolution devant être mobilisables par des élèves de cours moyen seront présentées ci-après.

Exemple 2 : « *Dans une ferme, il y a des lapins et des poules. Pour faire chercher le nombre de poules et de lapins à son frère, Cindy lui dit qu'il y a 114 pattes et 40 têtes. Combien y a-t-il de poules et combien y a-t-il de lapins dans la ferme ?* »

En classe de seconde ce problème pourra être traité en écrivant un système de deux équations à deux inconnues. Au cycle 4, les collégiens utiliseront une unique inconnue, par exemple p le nombre de poules ; le nombre de lapins se déduit alors du nombre de têtes, il est de $40 – p$. Le nombre de pattes permet alors d'écrire une équation qui conduit à trouver la valeur de p et d'en déduire la solution du problème :

$$2 \times p + 4 \times (40 - p) = 114$$

Au cours moyen, ce type de problèmes peut être résolu de différentes façons, qui seront appliquées dans la suite aux deux exemples précédents. Les principales sont :

- Par essais et ajustements : l'élève choisit une valeur pour le nombre ou l'un des nombres cherchés, puis l'injecte dans le problème pour voir si cette valeur convient ; si ce n'est pas le cas, il fait une autre hypothèse en ajustant avec un nombre plus ou moins grand en fonction du résultat obtenu, jusqu'à ce qu'une valeur convienne.
- Par un traitement pré-algébrique : l'élève produit ce qui s'apparente à une ou plusieurs équations qu'il manipule ensuite (combinaisons, substitutions) pour isoler une inconnue et en déterminer la valeur ; la représentation dite « en barres » est particulièrement adaptée à la résolution des problèmes algébriques à une inconnue.
- Par un raisonnement s'appuyant sur les résultats obtenus à partir d'une hypothèse : ce type de traitement peut, notamment, être utilisé pour traiter les problèmes algébriques avec deux inconnues et deux équations.

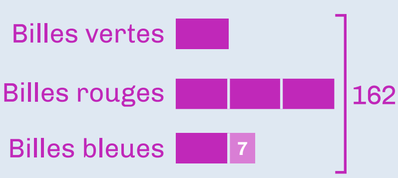
EXEMPLES DE RÉSOLUTIONS DES DEUX PROBLÈMES ALGÉBRIQUES PRÉCÉDENTS POUR CHACUNE DES TROIS STRATÉGIES DE RÉSOLUTION ENVISAGÉES

<table>
<tr><th></th><th>Dans un paquet de billes rouges, vertes ou bleues, il y a 162 billes. Il y a trois fois plus de billes rouges que de billes vertes et 7 billes vertes de moins que de billes bleues. Combien y a-t-il de billes rouges ?</th><th>Dans une ferme, il y a des lapins et des poules. Pour faire chercher le nombre de poules et de lapins à son frère, Cindy lui dit qu'il y a 114 pattes et 40 têtes. Combien y a-t-il de poules et combien y a-t-il de lapins dans la ferme ?</th></tr>
<tr><td>Par essais et ajustements</td><td>On suppose qu'il y a 10 billes vertes.
3 x 10 billes = 30 billes
10 billes + 7 billes = 17 billes
Il y aurait alors 30 billes rouges et 17 billes bleues.

10 billes + 30 billes + 17 billes = 57 billes
Il y aurait au total 57 billes, ce qui n'est pas suffisant.

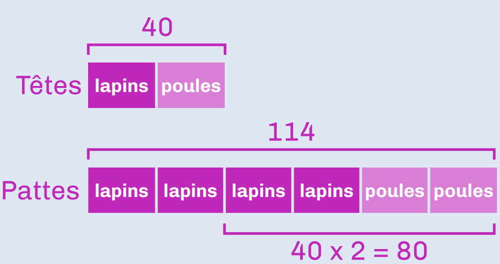
On recommence avec un nombre plus grand de billes vertes : on suppose qu'il y a 20 billes vertes, etc.</td><td>Comme il y a 40 têtes, il y a 40 animaux.
On peut commencer par supposer que la moitié sont des lapins.
40 – 20 = 20

S'il y a 20 lapins, alors il y a 20 poules.
20 x 4 pattes + 20 x 2 pattes = 120 pattes
Le nombre de pattes est alors de 120.
Cela fait trop de pattes ; 20 lapins, c'est donc trop de lapins.

On recommence en supposant qu'il y a 15 lapins, etc.</td></tr>
<tr><td>Par un traitement pré-algébrique</td><td>

162 – 7 = 155
Les 5 rectangles violet foncé identiques correspondent donc à 155 billes.

155 ÷ 5 = 31
Chaque rectangle violet correspond donc à 31 billes.
Il y a donc 31 billes vertes.

3 x 31 = 93
Il y a 93 billes rouges.</td><td>Un rectangle foncé représente le nombre de lapins et un rectangle clair le nombre de poules.


Les 4 rectangles sur la droite représentent deux fois le nombre de lapins plus deux fois le nombre de poules, soit 2 x 40.

114 – 80 = 34
34 ÷ 2 = 17
Il y a 17 lapins.

40 – 17 = 23
Il y a 23 poules.</td></tr>
</table>

	Dans un paquet de billes rouges, vertes ou bleues, il y a 162 billes. Il y a trois fois plus de billes rouges que de billes vertes et 7 billes vertes de moins que de billes bleues. Combien y a-t-il de billes rouges ?	**Dans une ferme, il y a des lapins et des poules. Pour faire chercher le nombre de poules et de lapins à son frère, Cindy lui dit qu'il y a 114 pattes et 40 têtes. Combien y a-t-il de poules et combien y a-t-il de lapins dans la ferme ?**
Par un raisonnement déductif s'appuyant sur une hypothèse	On suppose qu'il y a 10 billes vertes. Il y a alors 3 x 10 = 30 billes rouges et 10 + 7 = 17 billes bleues. 10 + 30 + 17 = 57 162 – 57 = 105 ; il manque donc 105 billes pour atteindre 162 billes. À chaque fois que j'ajoute 1 bille verte, j'ajoute 3 billes rouges et 1 bille bleue. Cela fait donc 5 billes en plus. 105 ÷ 5 = 21 Il faut ajouter 21 billes vertes et il y en aura alors 10 + 21 = 31. Il y a alors 3 x 31 = 93 billes rouges.	Comme il y a 40 têtes, il y a 40 animaux, on peut commencer par supposer que la moitié sont des lapins. S'il y a 20 lapins, alors il y a 40 – 20 = 20 poules. Le nombre de pattes est alors 20 x 4 pattes + 20 x 2 pattes = 120 pattes. 120 pattes – 114 pattes = 6 pattes Cela fait 6 pattes en trop. En remplaçant un lapin par une poule, cela fait deux pattes en moins. Il faut donc remplacer 3 lapins par 3 poules. Il y a 17 lapins et 23 poules.

Les problèmes de dénombrement

On considère ici des problèmes consistant à déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble qui ne se résolvent pas immédiatement par l'une des quatre opérations, et qui, dans le second degré, pourront être résolus en mobilisant de nouvelles notions mathématiques (combinaisons, arrangements, etc.). Pour résoudre ces problèmes à l'école élémentaire, il va falloir trouver un moyen d'organiser les éléments de l'ensemble que l'on cherche à dénombrer pour obtenir la certitude d'avoir effectivement trouvé l'ensemble des solutions sans avoir compté plusieurs fois la même et sans en avoir oublié. Autrement dit, il s'agit de s'organiser pour énumérer sans répétition toutes les solutions d'un problème. **Les arbres** ou **les tableaux** se montrent particulièrement efficaces pour traiter ce type de problèmes.

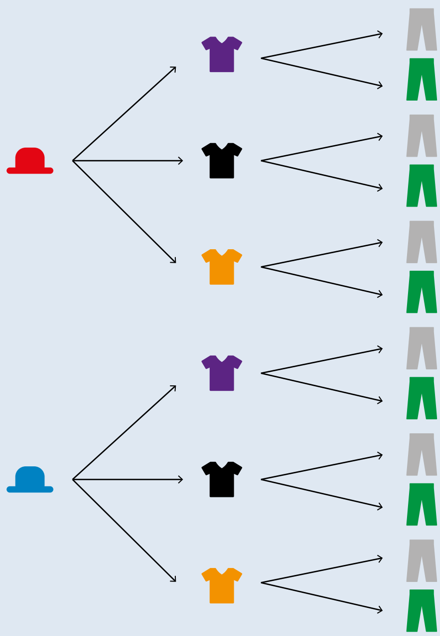
Exemple 1 : « *Combien peux-tu écrire de nombres à deux chiffres en utilisant uniquement les chiffres 2, 3, 4 et 5 ? Le même chiffre ne peut être utilisé qu'une fois.* »

Un tableau permet de faire apparaître l'exhaustivité des 12 réponses trouvées :

2e chiffre / 1er chiffre	2	3	4	5
2	-	23	24	25
3	32	-	34	35
4	42	43	-	45
5	52	53	54	-

Exemple 2 : « *Pour se déguiser, un clown dispose de :*
- *2 chapeaux (un rouge, un bleu) ;*
- *3 tee-shirts (un violet, un noir, un orange) ;*
- *2 pantalons (un gris, un vert).*

Combien de costumes différents complets, avec un chapeau, une veste et un pantalon, le clown peut-il faire ?[34] »



Pour ce problème de produit cartésien de trois ensembles, l'utilisation d'un tableau proposé dans le cas d'un produit cartésien de deux ensembles n'est plus possible du fait des trois entrées. Un arbre est sans doute le moyen le plus efficace pour s'assurer de l'exhaustivité des 12 costumes complets trouvés.

Les problèmes préparant à l'utilisation d'algorithmes

Ces problèmes consistent à rechercher des solutions vérifiant certaines conditions parmi un ensemble de cas possibles. Il faut ainsi balayer tous les cas possibles et tester, pour chacun de ces cas, s'il vérifie ou non les conditions attendues. Un raisonnement en amont ou en parallèle des calculs peut parfois permettre de restreindre les cas à tester. De tels problèmes pourront se traiter dans le second degré en écrivant un programme permettant de balayer tous les cas possibles et de tester, pour chacun d'eux, s'il vérifie ou non les conditions attendues.

Au cours moyen, on peut, par exemple, proposer le problème suivant :

> « *Un rectangle a ses côtés qui ont pour longueur des nombres entiers de centimètres. Son aire est de 100 cm^2. Trouve toutes les dimensions possibles pour ce rectangle.* »

34 — Problème librement inspiré de https://edu1d.ac-toulouse.fr/politique-educative-31/ien31-toulouse-sud/files/2019/05/solutions_-pb_chercher_%C3%A9nonc%C3%A9s-cycle-2-et-3.pdf

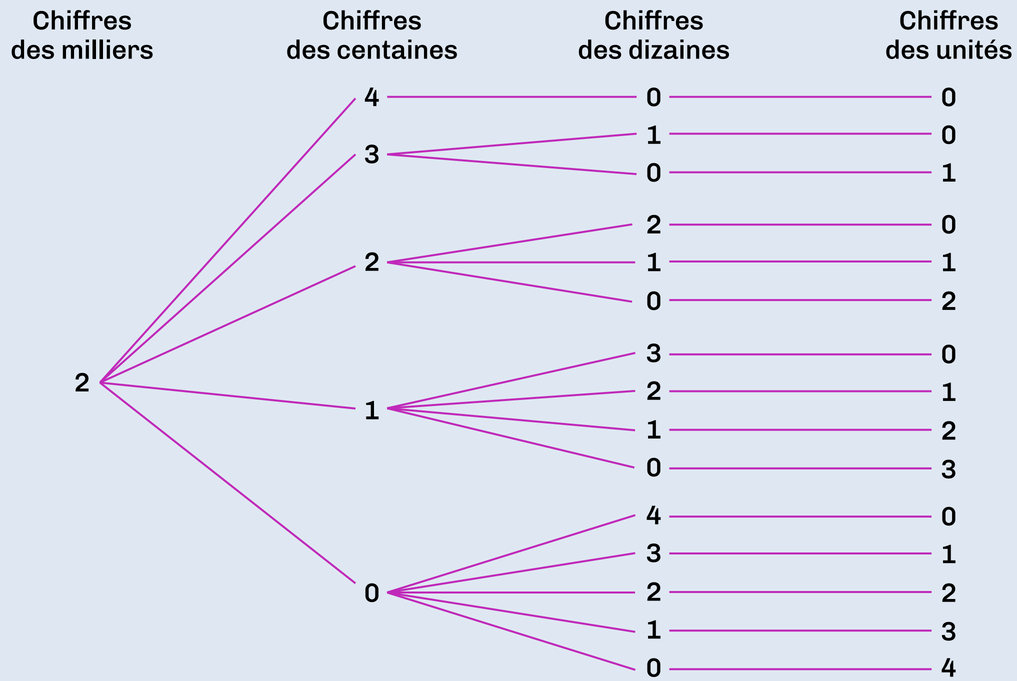
On cherche donc les couples de nombres entiers strictement positifs dont le produit est 100. L'élève peut commencer par choisir une largeur de 1 cm et chercher s'il existe une longueur qui convient, puis continuer avec une largeur de 2 cm, puis 3 cm, etc. L'algorithme s'arrête au plus tard pour une largeur de 100 cm. L'élève peut s'arrêter à 10 cm avec un argument sur la largeur inférieure à la longueur, ou sur le fait que le produit de deux nombres supérieurs à 10 est plus grand que 100 et donc que le travail mené avec les nombres de 1 à 10 permet de s'assurer de disposer de tous les cas possibles.

Le nombre de cas possibles peut nécessiter un raisonnement en amont pour trouver l'ensemble des solutions sans tester tous les cas possibles individuellement.

Exemple :

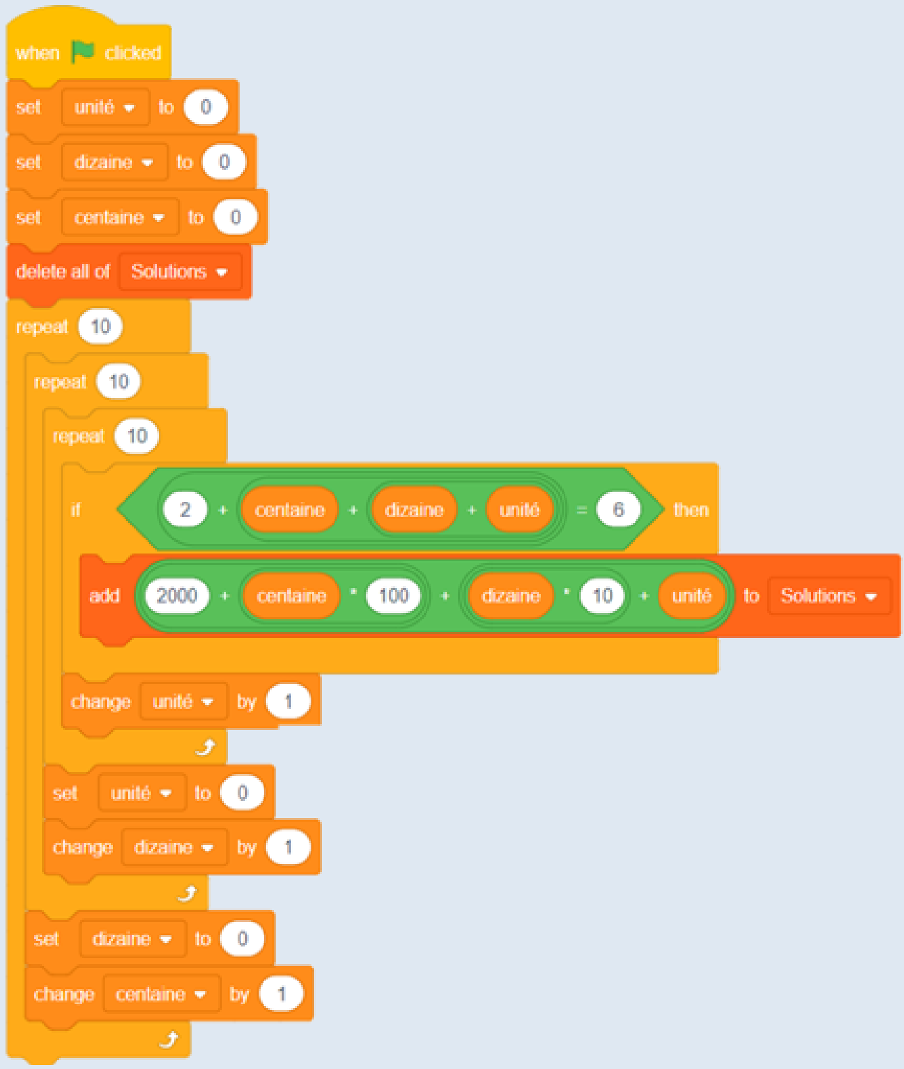
> « *La somme des chiffres de l'année 2022 est 6.*
> *Trouve toutes les années entre l'an 2000 et l'an 3000 qui ont une somme de leurs chiffres égale à 6.* »

Au cours moyen, un arbre permet de déterminer l'ensemble des solutions assez facilement en établissant qu'aucun des trois derniers chiffres ne peut être supérieur à 4.



Au collège, il est possible, avec Scratch par exemple, d'écrire un programme balayant tous les nombres entre 2 000 et 3 000 et testant pour chacun d'eux si la somme de ses chiffres est ou non égale à 6, comme celui ci-après[35]. L'intérêt est alors de pouvoir résoudre rapidement des problèmes similaires, mais pour lesquels le nombre de solutions plus grand rend une recherche à la main fastidieuse ; par exemple, en changeant la valeur de la somme cible, on peut trouver rapidement toutes les années pour lesquelles la somme des chiffres est égale à 20.

35 — Un éditeur Scratch en ligne : https://scratch.mit.edu/projects/editor/



Dans certains cas, seules quelques solutions peuvent être demandées, sans que l'objectif soit de rechercher l'exhaustivité. Par exemple : « *Un enseignant veut faire des groupes avec les 30 élèves de sa classe. Chaque groupe doit avoir le même nombre d'élèves et chaque groupe doit avoir un nombre impair d'élèves. Donne deux façons différentes que l'enseignant peut utiliser pour constituer les groupes.*
Première façon
— *Nombre de groupes :*
— *Nombre d'élèves dans chaque groupe :*
Deuxième façon
— *Nombre de groupes :*
— *Nombre d'élèves dans chaque groupe :*[36] »

36 — Ce problème est issu de l'évaluation internationale Timss 2019 proposée par l'IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement), https://timssandpirls.bc.edu/

Les problèmes d'optimisation

Les problèmes d'optimisation consistent à trouver la meilleure solution possible tout en respectant un certain nombre de contraintes. On peut citer l'exemple classique consistant à chercher les dimensions que doit avoir une boîte de conserve cylindrique de contenance 1 L, permettant d'utiliser le moins de métal possible, c'est-à-dire dont la surface extérieure est la plus petite possible. Ce problème est bien évidemment irrésoluble en l'état par des élèves de cours moyen, cependant on peut, par exemple, faire comparer les aires des surfaces extérieures de quelques emballages alimentaires ayant tous la même contenance et la forme d'un pavé droit.

De manière plus générale, au cours moyen, les problèmes d'optimisation consisteront à trouver la meilleure solution possible parmi un ensemble fini de solutions, comme dans le problème suivant : « *Parmi les rectangles qui ont leurs côtés mesurant un nombre entier de centimètres et dont le périmètre est 20 cm, détermine celui qui a la plus grande aire.* »

Au cours moyen, les problèmes d'optimisation peuvent également consister à trouver la meilleure solution respectant plusieurs contraintes comme dans les problèmes suivants :

— « *Célia a 12 longueurs de fil, 40 perles rondes et 48 perles plates. Elle utilise 1 longueur de fil, 10 perles rondes et 8 perles plates pour fabriquer 1 bracelet. Si Célia fabrique des bracelets tous identiques, combien peut-elle en fabriquer ?*[37] »
— « *Lors d'une expédition en Amazonie, 21 voyageurs avec 45 caisses de matériel doivent utiliser une pirogue pour se rendre au point de départ de leur expédition. Le conducteur de la pirogue leur annonce qu'il ne peut transporter que 5 voyageurs à la fois, car il n'a que 5 gilets de sauvetage en plus du sien. Pour des raisons de place dans la pirogue, il ne peut transporter que 7 caisses de matériel à la fois, quel que soit le nombre de personnes transportées.*
Combien faut-il prévoir de voyages en pirogue pour transporter l'intégralité des voyageurs et de leur équipement ? »

Pour chacun de ces deux problèmes, il faut effectuer un calcul de nombre de parts pour chacune des données à prendre en compte. Pour le premier problème, c'est la valeur minimale qui doit être retenue (Célia a des fils pour fabriquer 12 bracelets, des perles rondes pour fabriquer 4 bracelets et des perles plates pour fabriquer 6 bracelets ; elle ne peut donc fabriquer que 4 bracelets). Pour le second problème, c'est la valeur maximale qu'il faut retenir (pour transporter les voyageurs, il faut prévoir 5 voyages et pour transporter le matériel, il faut prévoir 7 voyages ; il faudra donc prévoir 7 voyages).

37 — Ce problème est issu de l'évaluation internationale Timss 2015 proposée par l'IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement), https://timssandpirls.bc.edu/

En résumé

- **Pour résoudre des problèmes, les enfants comme les adultes s'appuient en priorité sur leur mémoire de problèmes résolus.** L'enseignement de la résolution de problèmes a donc pour objectif d'engager les élèves dans la résolution d'une grande diversité de problèmes et de leur donner les moyens de repérer, parmi les problèmes résolus antérieurement, ceux susceptibles de les aider dans la résolution de nouveaux problèmes.

- **Classer les problèmes n'est pas un objectif d'enseignement** et n'est pas une tâche dévolue aux élèves. Une classification des problèmes permet au professeur de structurer son enseignement, afin de s'assurer que les problèmes traités couvrent l'ensemble du spectre des problèmes devant pouvoir être résolus par des élèves de cours moyen.

- **Au cours moyen, le traitement de certains problèmes est quasi automatisé.** Pour d'autres problèmes, en particulier une bonne partie des problèmes en plusieurs étapes et les problèmes atypiques, le traitement peut faire appel à une combinaison de stratégies utilisées dans divers problèmes avec une adaptation à la situation précise du problème.

II

Qu'est-ce que résoudre un problème ?

Ce chapitre a pour objectif de fournir un cadre permettant de décomposer, en plusieurs phases, la résolution de problèmes verbaux à données numériques. L'objectif de cette décomposition en phases est de permettre d'analyser finement les productions, orales ou écrites, de résolution de problèmes des élèves, afin de pouvoir accompagner le plus précisément possible leurs apprentissages en intervenant spécifiquement, et de façon appropriée, sur les points qui posent des difficultés à chacun d'entre eux.

Quatre phases fondamentales pour la résolution de problèmes : comprendre, modéliser, calculer et répondre

George Pólya, mathématicien américain d'origine hongroise et suisse, a été un des premiers à formaliser, dès 1945, une structure en plusieurs étapes du processus de résolution de problèmes : comprendre le problème, concevoir un plan, mettre le plan à exécution et examiner la solution obtenue[38]. De nombreuses recherches menées depuis ont conduit à affiner le processus de résolution de problèmes.

« L'application des mathématiques pour résoudre des problèmes situés dans le monde réel, également appelée modélisation mathématique, peut être conçue comme un processus complexe comprenant plusieurs étapes : la compréhension de la situation décrite ; la construction d'un modèle mathématique qui décrit l'essence de ces éléments et les relations significatives impliquées dans la situation ; l'application du modèle mathématique pour identifier ce qui en découle ; l'interprétation du résultat des calculs afin de parvenir à une solution de la situation pratique qui a donné lieu au modèle mathématique ; l'évaluation du résultat interprété en relation à la situation d'origine ; et la communication des résultats interprétés. »

Lieven Verschaffel, Erik De Corte, « La modélisation et la résolution des problèmes d'application : de l'analyse à l'utilisation efficace », dans Marcel Crahay, Lieven Verschaffel, Erik De Corte, Jacques Grégoire (dir.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?*, De Boeck, Bruxelles, 2008.

38 — George Pólya, *Comment poser et résoudre un problème*, Dunod, Paris, 1965.

Un modèle fréquemment cité dans les recherches actuelles est celui de Lieven Verschaffel et Erik De Corte[39] reproduit ci-dessous.

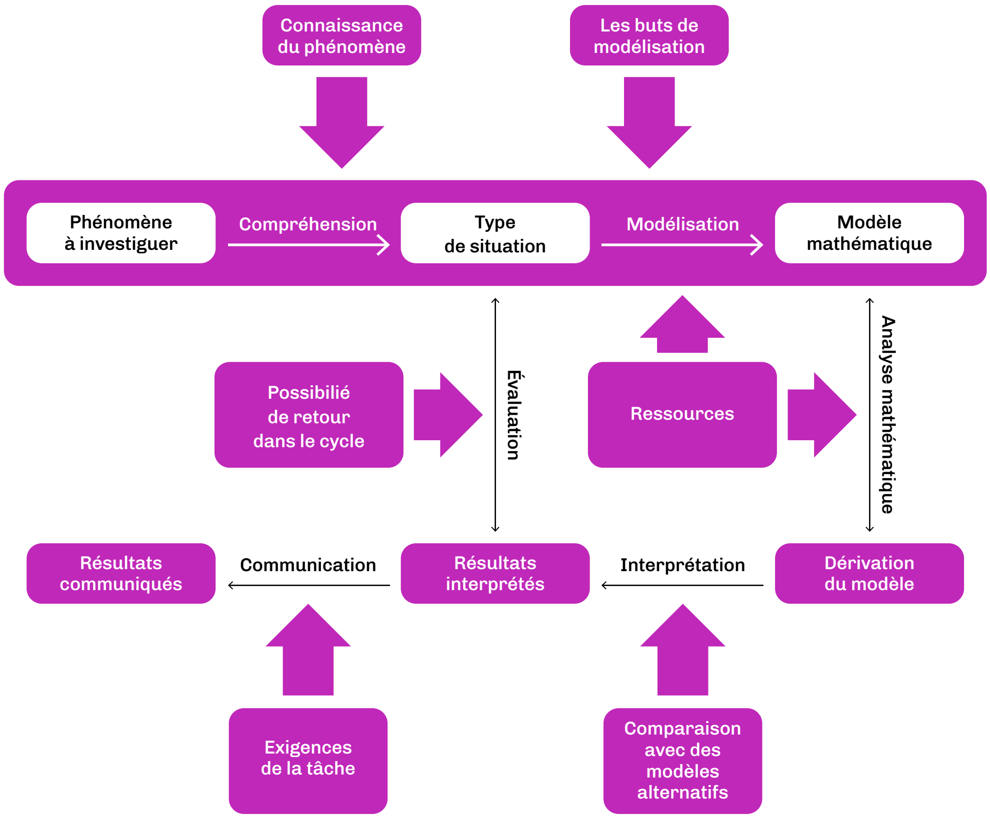


Figure 3. Vision élaborée du processus de résolution selon Lieven Verschaffel et Erik De Corte.

Ce modèle permet d'appréhender la complexité de la tâche des élèves pour résoudre les problèmes qui leur sont proposés ainsi que celle des professeurs pour analyser les difficultés rencontrées par les élèves et leurs éventuelles erreurs lors de ces résolutions.

Dans un souci de simplification, un modèle en quatre phases, fortement inspiré du modèle de Lieven Verschaffel et Erik De Corte, est retenu dans ce guide pour analyser les productions des élèves lors de la résolution de problèmes verbaux à données numériques : comprendre, modéliser, calculer, répondre.

39 — Lieven Verschaffel, Erik De Corte, « La modélisation et la résolution des problèmes d'application : de l'analyse à l'utilisation efficace », in Marcel Crahay, Lieven Verschaffel, Erik De Corte, Jacques Grégoire (dir.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?*, De Boeck, Bruxelles, 2008.

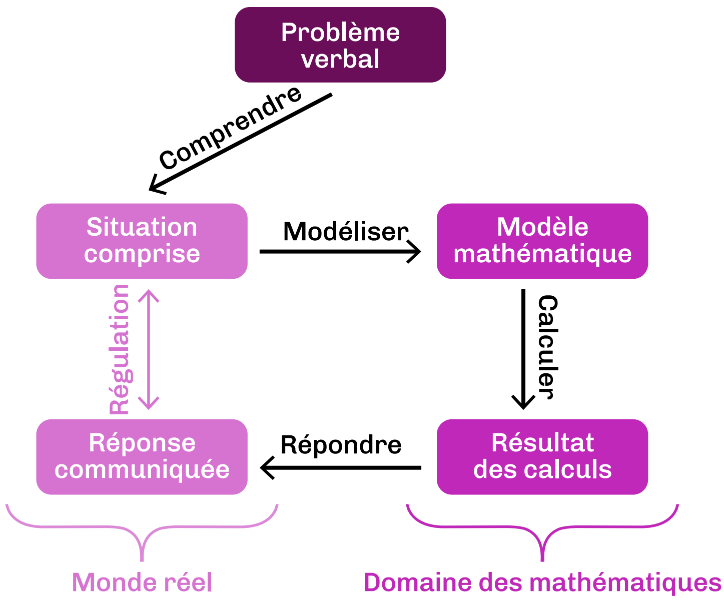


Figure 4. Modèle en quatre phases retenu pour la résolution de problèmes.

Ce modèle est présenté en quatre phases successives, mais il est clair qu'au cours de chacune des phases, des régulations sont mises en œuvre et peuvent conduire à revenir sur les phases précédentes pour confirmer ou infirmer ce qui a été mené antérieurement : « Je n'arrive pas à trouver les calculs qu'il va falloir effectuer. Ai-je vraiment bien compris ce problème et ce qui est demandé ? » ; « Les calculs me conduisent à un résultat irréaliste. Ai-je bien compris le problème ? Ne me suis-je pas trompé dans le choix de mon opération ou dans mes calculs ? » ; « Ma conclusion n'a pas de sens, car le résultat trouvé est beaucoup trop grand. Ne me suis-je pas trompé dans mes calculs ? » ; etc. Cette présentation linéaire ne doit donc pas conduire à négliger les allers-retours entre chaque phase.

Comprendre

Un problème est en premier lieu une histoire qu'il va falloir comprendre ; mais cette histoire se distingue des histoires que peuvent rencontrer les élèves dans d'autres contextes, sur deux points en particulier :

— **La compréhension doit être fine.** Si une compréhension globale et approximative peut être suffisante dans d'autres cadres, en résolution de problèmes une telle compréhension risque de ne pas être suffisante pour apporter une réponse correcte au problème.

Par exemple, en lisant les phrases « *Ambre en a 3 de plus que Nour* » ou « *Ambre en a 3 fois plus que Nour* » dans un problème, il ne suffit pas de comprendre qu'Ambre a plus de ce dont on parle que Nour, mais il faut comprendre précisément le sens des expressions « de plus que » ou « fois plus que » qui change drastiquement la nature de la relation entre les deux cardinaux. Dans d'autres cadres, non scolaires notamment, avoir compris qu'Ambre en a plus que Nour pourra en revanche s'avérer suffisant.

— **Il y a une question.** Cette question est essentielle et il faut également la comprendre pour déterminer une nouvelle information numérique généralement précisée par cette question. Qu'est-ce que l'on cherche ? Quelle est la nature de ce que l'on cherche ?
Par exemple, pour le problème suivant rencontré dans le premier chapitre : « *Arthur a acheté des bouteilles identiques d'huile d'olive. Chaque bouteille contient 0,75 L d'huile d'olive et il a acheté 4,5 L d'huile d'olive en tout. Quel est le nombre de bouteilles d'huile d'olive achetées par Arthur ?* », ce que l'on cherche est le nombre de bouteilles achetées par Arthur ; le résultat sera le cardinal d'un ensemble, il s'agira d'un nombre entier.

Les processus en jeu dans la compréhension de textes étudiés en français interviennent également pour la compréhension d'un problème en mathématiques.

*« La compréhension des idées et de leur cohérence n'est jamais la simple addition de la signification des mots composant le texte, ni de celle des phrases successives. Elle suppose […] de comprendre comment les idées sont liées et se répondent d'une phrase à l'autre (**cohérence locale**) et comment les thèmes et sous-thèmes, les idées essentielles, s'organisent logiquement (**cohérence globale**).*

*– **La cohérence** (ou cohésion) **locale** renvoie aux relations qu'entretiennent les informations énoncées d'une phrase à l'autre. Cette cohésion permet de percevoir la continuité et la progression du/des thème(s) abordé(s). La fonction référentielle des déterminants, des pronoms, et plus généralement des substituts du nom assure la continuité de l'enchaînement des énoncés, tandis que les connecteurs et les signes de ponctuation marquent la progression thématique. Ces marques de cohésion sont des instructions qui indiquent au lecteur les relations à établir entre les énoncés. Elles facilitent donc la compréhension, à condition que leur fonctionnement et leur signification soient maîtrisés.*
*– **La cohérence globale** concerne la compréhension de l'organisation du texte dans son ensemble : les thèmes et sous-thèmes développés, leur organisation logique, leur relation aux conditions de l'énonciation ainsi qu'aux connaissances du lecteur.*

Cette élaboration sollicite dans un temps bref, et souvent simultanément, des connaissances et des mécanismes cognitifs nombreux et de natures différentes. »

***La Compréhension au cours moyen*, collection « Les guides fondamentaux pour enseigner », ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2022.**

Exemple : « *Lise et Simon ont ramassé 72 coquillages sur la plage. Simon en a 12 de moins que sa sœur dans son seau. Combien de coquillages Lise a-t-elle ramassés ?* »

La cohérence locale permet de faire des liens fins entre les phrases. Elle permet de comprendre que le 12 de la deuxième phrase fait référence à des coquillages, bien que le mot n'apparaisse pas dans la phrase, les coquillages étant mentionnés à travers le pronom « en ». Le lecteur comprend aussi que la sœur mentionnée n'est autre que Lise. Il comprend aussi que Lise a ramassé plus de coquillages que son frère Simon et qu'elle en a exactement 12 de plus que lui.

La cohérence globale permet de visualiser une scène se déroulant à la plage. Ceux qui ne vivent pas en bord de mer pourront y voir des vacances estivales, d'autres se représenteront une activité de pêche dominicale ou un moment de détente. S'il est probable que la plupart des lecteurs y voient l'histoire de deux enfants, rien ne le dit : Lise et Simon peuvent être adultes, par exemple un frère et une sœur retraités. Selon leur vécu, les lecteurs peuvent imaginer une séance de pêche aux coques ou aux bigorneaux, ou simplement le ramassage de coquilles vides sur la plage, avec deux enfants munis chacun d'un petit seau en plastique. Mais, indépendamment de cette diversité d'interprétations, ce qui compte pour la résolution du problème est de comprendre que l'on s'intéresse au cardinal de deux collections, l'une associée à Simon et l'autre à sa sœur Lise.

Les textes des énoncés de problèmes en mathématiques sont relativement courts. On peut donc penser que le manque de fluidité de lecture n'est pas un fort obstacle pour les élèves de cours moyen qui ont acquis le niveau attendu en fin de cycle 2[40], voire également pour ceux qui ont un niveau de **fluidité de lecture** légèrement inférieur à ce niveau attendu. Mais il le sera sans doute pour les élèves n'ayant pas atteint le niveau attendu en lecture en fin de CE1[41]. Dans ce cas, une ou plusieurs lectures à voix haute de l'énoncé peuvent leur être faites, par le professeur ou par un élève voisin. L'objectif est que l'élève concerné puisse se consacrer pleinement à la résolution de problèmes, en étant le moins entravé possible par ses difficultés en lecture.

Les capacités d'inférence sont ainsi essentielles pour la bonne compréhension des problèmes, notamment parce que l'utilisation de pronoms est fréquente, même dans des énoncés très courts.

> « *Camille avait 4,35 €. Son frère lui a donné 2,80 €. Combien d'argent a-t-elle maintenant ?* »

Il faut comprendre ici que le « elle » de la question fait référence à Camille qui est donc une fille et que le « lui » de la deuxième phrase fait également référence à cette même Camille.

Les capacités d'inférence sont aussi essentielles pour comprendre les énoncés de problèmes mathématiques en présence de catégories englobantes :

— « *J'ai acheté 6,4 kg de pommes et 3,8 kg de poires. Quelle est la masse de fruits achetés ?* »
— « *Gabin a réalisé un bouquet de fleurs. Un quart sont des roses, un tiers sont des œillets et les 10 autres fleurs sont des marguerites. Combien y a-t-il de fleurs dans le bouquet de Gabin ?* »

Il faut ici comprendre que le mot « fruits » fait référence aux pommes et aux poires et que le mot « fleurs » fait référence aux roses, aux œillets et aux marguerites.

40 — 90 mots correctement lus par minute.
41 — 70 mots correctement lus par minute.

Cette compréhension est nécessaire pour la résolution de ces problèmes. Elle est en particulier indispensable pour reconnaître une structure composée d'un tout et de parties, puis la possibilité d'une addition pour calculer la valeur du tout à partir de celle des parties, ou d'une soustraction pour calculer la valeur d'une partie en connaissant celle du tout et des autres parties. Ces inférences liées aux structures mathématiques vont avoir un rôle tout particulier sur les modélisations envisageables par les élèves[42].

« Impliquées à tous les niveaux de traitement du texte, **l'auto-évaluation et la régulation** jouent un rôle particulier dans la saisie de la cohérence globale. Elles contribuent à construire une représentation unifiée de l'ensemble des informations énoncées, en rendant compréhensible au lecteur leur organisation. Elles lui permettent de repérer et se représenter logiquement, au fur et à mesure de la lecture, comment s'organisent »[43] les données du problème. L'auto-évaluation permet de détecter un éventuel défaut de compréhension et la régulation est destinée à surmonter la difficulté décelée.

L'auto-évaluation et la régulation doivent permettre aux élèves de s'assurer que le problème fait sens pour eux lors de cette phase de compréhension. De nombreux chercheurs considèrent que les élèves ignorent trop souvent le monde réel lors de la résolution de problèmes[44]. Il est donc utile de leur proposer, de temps en temps, des problèmes nécessitant un ancrage fort dans le monde réel. Cela les conduira à prendre un certain recul sur les données numériques en jeu, comme dans le problème suivant :

> « *Maëlys a acheté 4 planches de 2,5 mètres de long chacune. Combien de planches de 1 mètre de long peut-elle scier à partir de ces planches ?* »

La simple reconnaissance d'un problème multiplicatif sans s'appuyer sur la situation dont il est question, qui exclut d'accoler entre elles des planches de 0,5 mètre de long, peut conduire certains élèves à calculer 4 x 2,5 m[45].

On peut aussi leur proposer des problèmes de recherche du nombre de parts pour lesquels le quotient n'est pas la réponse, car le reste non nul doit être pris en compte, comme pour le problème suivant :

> « *Pour une course d'orientation, les 245 élèves de l'école et leurs 38 accompagnateurs doivent être transportés par car. Un car peut transporter 46 passagers. Combien de cars la directrice doit-elle réserver pour pouvoir transporter tous les élèves et tous les accompagnateurs ?* »

---

42 — Hippolyte Gros, Jean-Pierre Thibaut, Emmanuel Sander, "Semantic Congruence in Arithmetic: A New Conceptual Model for Word Problem Solving", *Educational Psychologist*, n° 55, 2020.
43 — *La Compréhension au cours moyen*, collection « Les guides fondamentaux pour enseigner », ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et des Sports, 2022.
44 — Brian Greer, "The Mathematical Modeling Perspective on Wor(l)d Problems", *The Journal of Mathematical Behavior*, n° 12, 1993.
45 — Lieven Verschaffel, Erik De Corte, Sabien Lasure, "Realistic Considerations in Mathematical Modeling of School Arithmetic Word Problems", *Learning and Instruction*, Vol. 4, 1994.

Modéliser

La modélisation est le « processus par lequel l'individu convertit les données des situations réelles en problème mathématique »[46]. Dans le cadre de la résolution des problèmes verbaux à données numériques à l'école élémentaire, la phase « modéliser » aboutit à déterminer, en s'appuyant sur d'éventuelles représentations (dessins, schémas, tableaux, arbres, etc.), quelles opérations devront être effectuées dans la phase suivante pour répondre à la question posée. Cette phase, tributaire de la compréhension, est centrale lors de la résolution de problèmes.

Pour un élève de cours moyen, la phase « modéliser », pour résoudre l'exercice issu de Timss proposé dans l'introduction, « *Une bouteille de jus de pomme coûte 1,87 zed. Une bouteille de jus d'orange coûte 3,29 zeds. Julien a 4 zeds. Combien de zeds Julien doit-il avoir en plus pour acheter les deux bouteilles ?* », conduit à établir, à partir de la situation, c'est-à-dire l'histoire d'un garçon qui veut acheter deux bouteilles de jus de fruit mais qui n'a pas assez d'argent, que le prix des deux bouteilles peut être déterminé par l'addition 1,87 zed + 3,79 zeds, et que la somme d'argent supplémentaire dont Julien a besoin, vue comme un écart ou comme un reste après un retrait selon la représentation de la situation que se fait l'élève, peut être calculée en soustrayant 4 zeds à la somme obtenue. Cette modélisation n'est pas simple pour certains élèves, comme en atteste en particulier le faible taux de réussite des élèves français à cet exercice.

De façon générale, quatre des « six compétences majeures de l'activité mathématique »[47] mises en exergue dans les programmes des cycles 2, 3 et 4 sont mobilisées lors du passage de la situation comprise à partir de l'énoncé au modèle mathématique retenu pour résoudre le problème. Cette mobilisation peut être observée en s'appuyant sur l'exemple précédemment proposé.

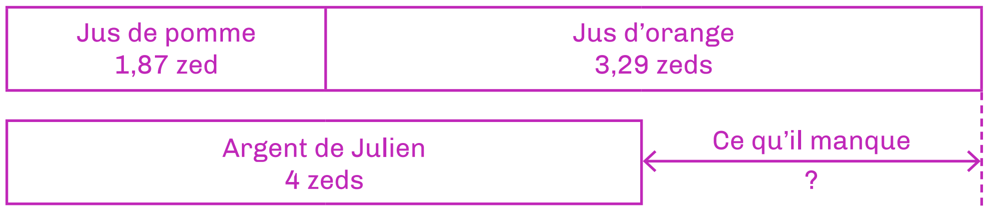
— La compétence « **chercher** » s'appuie en premier lieu sur la confiance qu'ont les élèves en leur aptitude à trouver la solution. Cette assurance se renforce par une pratique fréquente de la résolution de problèmes avec des propositions de problèmes adaptés aux compétences que les élèves ont développées, mais aussi par des retours positifs du professeur lors des recherches menées en résolution de problèmes.

— La compétence « **représenter** » peut soutenir l'activité de modélisation de l'élève. Elle permet de faire le lien entre le texte du problème et ses caractéristiques mathématiques. En effet, un schéma permet de rendre visibles les relations entre les grandeurs présentes dans l'énoncé et leur relation avec ce qui est cherché.

46 — Marcel Crahay, Lieven Verschaffel, Erik De Corte, Jacques Grégoire, *Enseignement et apprentissage des mathématiques* (Introduction), De Boeck Supérieur, Bruxelles, 2008.

47 — chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner et communiquer.

Voici, par exemple, un schéma en barres correspondant à la situation de comparaison proposée :



Des recherches récentes[48] ont montré que la construction de représentations schématiques s'avère être un dispositif efficace à proposer aux élèves, y compris pour des formes de problèmes jamais rencontrées. Ces recherches ont également mis en avant cette efficacité pour les élèves rencontrant des difficultés en mathématiques. Cette construction favorise l'accès aux mathématiques par l'analyse de la structure mathématique sous-jacente et prépare au passage à l'algèbre.

La compétence « représenter » ne se développe pas de façon spontanée chez les élèves : il ne suffit pas d'inviter chaque élève à effectuer le dessin ou le schéma « qui lui convient ». Elle se développe au contraire par un enseignement construit et structuré sur plusieurs années visant à faire acquérir aux élèves des outils pour construire des représentations efficaces et porteuses de sens facilitant la modélisation.

— **La compétence « raisonner »** est fortement mobilisée dans cette phase de modélisation, comme dans chacune des quatre phases de la résolution de problèmes présentées dans ce chapitre, pour analyser la situation en utilisant ses connaissances afin d'établir un modèle mathématique adapté. Des inférences doivent en effet être réalisées à partir des éléments fournis par l'énoncé du problème et parfois des hypothèses émises en amont de ces inférences. Les raisonnements menés doivent conduire à un travail, guidé par l'enseignant dans un premier temps, sur la structuration de la langue en mobilisant des connecteurs comme « donc » ou « parce que ».

48 — Annick Fagnant, Joëlle Vlassis, "Schematic Representations in Arithmetical Problem Solving: Analysis of Their Impact on Grade 4 Students", *Educational Studies in Mathematics*, n° 84, 2013.
Annie Savard, Elena Polotskaia, « Gérer l'accès aux mathématiques dans la résolution de problèmes textuels : une exploration du côté de l'enseignement primaire », *Éducation et francophonie,* 2014.
Elena Polotskaia, "How the Relational Paradigm Can Transform the Teaching and Learning of Mathematics: Experiment in Quebec", *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, Vol. 18, n° 2, 2017.
Berinderjeet Kaur, "The Why, What and How of the 'Model' Method: A Tool for Representing and Visualising Relationships When Solving Whole Number Arithmetic Word Problems", *ZDM – Mathematics Education*, n° 51, Springer, 2018.

— **La compétence « modéliser »** n'est pas l'aboutissement de cette deuxième phase, mais en est au cœur. La compétence « représenter » qui peut se manifester par la réalisation d'un dessin ou d'un schéma ne précède pas la compétence « modéliser ». Pour notre exemple, avant même de pouvoir commencer à faire le schéma, l'élève doit reconnaître qu'il s'agit d'une situation de comparaison avec d'un côté ce qui est dépensé et de l'autre l'argent possédé par Julien. Ce premier constat permet à l'élève de se lancer dans la construction d'un schéma avec deux barres mises en parallèle. L'élève doit ensuite percevoir que cette comparaison est additive, avec d'une part les dépenses, conçues comme la réunion de deux parties formant un tout, et d'autre part l'argent possédé, pour pouvoir compléter le schéma. Une fois celui-ci réalisé, l'élève dispose d'un support qui rend visibles les relations entre les données de l'énoncé ; ce schéma est alors une aide pour dégager des étapes possibles de résolution du problème et les traduire sous forme d'opérations : calcul d'un tout par une addition (1,87 zed + 3,29 zeds), puis calcul d'un écart par une soustraction (en soustrayant 4 zeds à la somme trouvée).

On comprend bien ici que c'est l'interaction permanente entre les différentes « compétences majeures » qui permet d'aboutir au modèle mathématique recherché.

Calculer

La phase « calculer » est sans doute la plus simple à définir : il s'agit de la réalisation, par les élèves, des calculs correspondant à la suite d'opérations découlant de la modélisation. Si l'on revient au problème précédent des jus de fruits, l'élève doit pouvoir trouver que 1,87 zed + 3,29 zeds est égal à 5,16 zeds et que 5,16 zeds – 4 zeds est égal 1,16 zed.

Cette phase peut s'avérer relativement simple, pour les élèves comme pour le professeur qui doit accompagner leur travail, sous réserve que les contenus relatifs aux attendus du programme de cycle 3 « utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux » et « calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux » soient suffisamment maîtrisés. Les élèves doivent, en effet, identifier les nombres en jeu dans l'énoncé quelle que soit leur écriture (en lettres, décimale avec ou sans virgule, sous forme fractionnaire) et disposer des connaissances et compétences techniques pour effectuer les calculs attendus. Ces calculs peuvent être réalisés soit mentalement, soit en ligne, soit en posant les opérations.

La résolution de problèmes va contribuer à renforcer la bonne maîtrise des techniques de calculs attendues des élèves (calcul mental ou calcul posé).

Répondre

Pour cette dernière phase, les élèves doivent considérer les calculs effectués et **interpréter** le ou les résultats trouvés dans le contexte du problème. Ils doivent ensuite **communiquer** la réponse de façon compréhensible par tous. Cette interprétation et cette communication doivent être menées tout en effectuant une **régulation** par rapport à la situation telle que comprise initialement, pour s'assurer, d'une part, que la réponse apportée répond bien à la question posée et, d'autre part, que cette réponse est cohérente avec le contexte du problème, en particulier du point de vue de l'ordre de grandeur du résultat et du réalisme de la solution à laquelle la résolution aboutit.

Des critères extra-mathématiques doivent parfois être utilisés pour vérifier la cohérence : par exemple un résultat donnant un nombre de passagers dans une voiture supérieur à six, doit interroger les élèves. Des critères mathématiques permettent également de vérifier cette cohérence : par exemple, un nombre total de passagers répartis dans des voitures ayant chacune trois passagers doit être un multiple de trois et doit donc avoir la somme de ses chiffres elle-même multiple de trois. À cette occasion, on vérifiera si les connaissances extra-mathématiques, souvent acquises dans la vie sociale, ou mathématiques, souvent acquises en classe, sont tout à la fois présentes chez les élèves et mobilisées à bon escient, car faire le lien entre les résultats obtenus par l'application d'un algorithme plus ou moins automatisé, tel que le calcul d'une multiplication, et la compatibilité du résultat obtenu avec la situation décrite dans l'énoncé est souvent une difficulté. Le problème « *Maëlys a acheté 4 planches de 2,5 mètres de long chacune. Combien de planches de 1 mètre de long peut-elle scier à partir de ces planches ?* » illustre cet enjeu, car il s'agit de réinjecter le résultat obtenu par multiplication, de faire un constat d'incompatibilité avec les contraintes de l'énoncé et d'envisager une nouvelle stratégie de résolution.

Lors de l'enseignement de la résolution de problèmes à l'école élémentaire, cette phase « répondre » est souvent réduite à la demande d'écriture d'une phrase respectant les canons usuels (une phrase complète, qui commence par une majuscule et qui finit par un point, comprenant le nombre solution associé à son unité). La réflexion sur la cohérence de la réponse est régulièrement négligée, alors qu'il s'agit d'une phase essentielle pour s'assurer que l'élève répond bien à la question posée et pour détecter d'éventuelles erreurs. Ceci peut être observé dans les réponses proposées par les élèves au problème suivant :

> « *Dans une ferme où l'on produit des œufs de poule, il y a ce matin 1 551 œufs qui vont devoir être mis dans des boîtes de 6 œufs. Combien faudra-t-il de boîtes pour pouvoir ranger tous les œufs ?* »

Les élèves de cours moyen doivent comprendre assez facilement qu'il s'agit de constituer des boîtes pleines d'œufs pour trouver le nombre de boîtes nécessaires. Cette représentation de boîtes que l'on remplit peut d'ailleurs conduire certains élèves à modéliser le problème par une suite de soustractions successives, la soustraction leur étant plus familière que la division et la division étant plus attachée à la recherche de la valeur d'une part qu'à celle du nombre de parts[49]. Une telle modélisation traduit bien la situation décrite dans l'énoncé et pourrait mener au résultat avec des nombres d'œufs plus petits, mais les nombres en jeu ont été choisis pour rendre le calcul quasi-impossible avec cette modélisation soustractive, conduisant ainsi les élèves à avoir recours à une modélisation par une division : il faut faire des « groupes » ou des « parts » de 6 œufs et chercher le nombre de groupes ou de parts. La modélisation aboutit ainsi à la recherche du quotient de la division de 1 551 par 6.

Un nombre de boîtes étant un entier, l'opération attendue est une division euclidienne. Cependant, le reste de la division euclidienne étant non nul, certains élèves peuvent poursuivre l'opération et effectuer une division décimale.

Voici quatre extraits de productions d'élèves :

<table>
<tr><th>Élève 1</th><th>Élève 2</th><th>Élève 3</th><th>Élève 4</th></tr>
<tr>
<td>1 551
x 6
9 306

Il faut 9 306 boîtes.</td>
<td>− 1 551 | 6
12 | 2 585
− 35
30
− 51
48
− 30
30
0

Il faut 2 585 boîtes.</td>
<td>− 1 551 | 6
12 | 258,5
− 35
30
− 51
48
− 30
30
0

La réponse est 258,5.</td>
<td>− 1 551 | 6
12 | 258
− 35
30
− 51
48
3

Il faut 258 boîtes.</td>
</tr>
</table>

Lors de la phase « répondre », les élèves doivent interpréter le résultat trouvé dans le contexte de la situation des boîtes d'œufs, en procédant à une régulation qui leur permet d'avoir un regard critique sur leur traitement des phases antérieures. Il s'agit à chaque fois de s'assurer de la compatibilité du résultat obtenu avec la situation telle que comprise.

— **L'élève 1** n'a vraisemblablement pas mené cette régulation qui aurait dû le conduire à rejeter un nombre de boîtes supérieur au nombre d'œufs. Ce regard critique sur le résultat aurait ainsi pu le conduire à remettre en question le modèle erroné retenu, à savoir une multiplication.
— **L'élève 2** aurait dû rejeter la réponse trouvée pour la même raison, ce qui aurait pu le conduire à investiguer de nouveau les phases antérieures, par exemple en contrôlant son calcul en estimant un ordre de grandeur de 2 585 x 6, et repérer l'oubli de la virgule dans le quotient de la division posée.

49 — Sarah Squire, Peter Bryant, "From Sharing to Dividing: Young Children's Understanding of Division", *Developmental Science*, n° 5, 2002.

— **L'élève 3** n'a vraisemblablement pas mené la régulation par rapport à la situation initiale qui consiste à se demander si le résultat trouvé répond bien à la question posée dans le problème. Un nombre de boîtes d'œufs doit en effet nécessairement être un entier. On voit ici l'importance de la prise en compte de la situation initiale dans la formulation de la phrase réponse : une formulation neutre comme « La réponse est » ne favorise pas la régulation attendue.

— Pour **l'élève 4**, la régulation manquante est plus fine. En effet, le résultat proposé est tout à fait vraisemblable. Mais si l'élève s'interroge plus en profondeur pour savoir si la solution proposée répond effectivement à la question posée, il doit se demander si les 258 boîtes permettent bien de ranger TOUS les œufs… Lors de cette régulation, l'élève aurait dû prendre en compte le quotient et le reste obtenus à l'issue de la division, et ne pas s'arrêter à la seule interprétation du quotient.

Cette régulation, qui s'inscrit dans le processus d'interprétation des calculs et de communication de la réponse, doit permettre de repérer d'éventuelles erreurs de modélisation ou de calculs, en faisant apparaître de possibles incohérences, notamment en termes d'ordre de grandeur.

Pour renforcer le travail sur cette dernière phase, certains problèmes en « Combien ? » peuvent être remplacés par des problèmes en « Est-ce que ? », pour lesquels la réponse attendue n'est pas une valeur numérique, mais une analyse à partir de la valeur numérique trouvée. On peut ainsi remplacer le premier problème ci-dessous, par le problème alternatif proposé ensuite.

— « *Monsieur Martin pèse 78,5 kg, Rose pèse 57,5 kg et Antonin pèse 42,5 kg. Combien pèsent-ils à eux trois ?* »

— « *Monsieur Martin pèse 78,5 kg, Rose pèse 57,5 kg et Antonin pèse 42,5 kg. Est-ce qu'ils peuvent monter ensemble dans un ascenseur acceptant une charge maximale de 180 kg ?* »

UN EXEMPLE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈME EN QUATRE PHASES

« *Marius revient du marché. Il a acheté 750 g de fraises, un demi-kilogramme d'abricots et a oublié la masse des kiwis achetés. Le contenu de son panier pèse 1,650 kg.*
Quelle est la masse des kiwis ? »

PHASE 1 : COMPRENDRE

Dans cet énoncé, lors de cette première phase, les élèves doivent comprendre que cette histoire est celle d'un homme nommé Marius qui a fait des achats au marché, qu'il a mis dans un panier. Les élèves doivent comprendre que, dans le panier, il y a des fraises, des abricots et des kiwis, qui n'ont pas été oubliés, mais dont Marius a oublié la masse. Ils doivent également comprendre qu'il n'y a rien d'autre dans le panier, ce qui est implicite et nullement précisé. Ils doivent aussi savoir que les masses s'additionnent pour former la masse du contenu du panier. Cette compréhension de la situation se prête à un codage parties-tout dans lequel le tout est composé de trois parties. Les élèves doivent pouvoir aussi interpréter « un demi-kilogramme » comme 0,5 kg ou comme 500 g.

Enfin, ils doivent comprendre que ce que l'on cherche est la masse des kiwis, un des trois éléments du panier, qui sera donnée sous la forme d'un nombre de grammes ou de kilogrammes.

PHASE 2 : MODÉLISER

Le modèle parties-tout sous-jacent est assez classique pour des élèves de cours moyen, mais le fait que les données numériques soient dans des unités différentes ajoute une difficulté susceptible de perturber la modélisation. Le recours à un schéma sera certainement facilitateur pour beaucoup d'élèves. Si lors de la première phase, l'élève a repéré la présence de trois fruits regroupés dans un panier, alors, lors de la phase de modélisation, il peut penser à un problème de type parties-tout avec trois parties, ce qui lui permet de se lancer dans la réalisation du schéma correspondant, à savoir un rectangle séparé en trois, ou trois rectangles juxtaposés.

Fraises	Abricots	Kiwis

Schéma qu'il peut assez facilement compléter ensuite avec les données qui lui sont fournies :

Fraises 750 g	Abricots 1/2 kg	Kiwis ?

1,650 kg

Cette représentation lui permet d'affiner sa modélisation et de planifier la résolution du problème en le décomposant : l'élève comprend en effet qu'il s'agit d'un problème dans lequel il faut trouver une des trois parties d'un tout. Il peut donc, dans un premier temps, additionner la masse des fraises et la masse des abricots et, dans un second temps, soustraire cette somme à la masse totale de fruits dans le panier. Cette modélisation n'est pas unique, l'élève pourrait aussi choisir de soustraire successivement la masse de fraises et la masse d'abricots à la masse totale.

PHASE 3 : CALCULER

L'exécution des calculs nécessite d'avoir des masses exprimées dans la même unité et l'élève peut donc convertir l'ensemble des données en grammes ou en kilogrammes.

Fraises 750 g	Abricots 0,5 kg	Kiwis ?

1,650 kg = 1 650 g

Les opérations sont ensuite réalisables en ligne ou en posant les calculs.
750 g + 0,5 kg = 750 g + 500 g = 1 250 g
1 650 g – 1 250 g = 400 g

PHASE 4 : RÉPONDRE

Pour la dernière étape, une régulation a lieu pour faire le lien avec la situation comprise : on a bien trouvé une masse, c'est la masse des kiwis. De plus, 400 g c'est un peu moins qu'un demi-kilogramme, il semble plausible d'acheter un peu moins d'un demi-kilogramme de kiwis, cela ne semble ni trop petit ni trop grand pour être acceptable ; une réponse de 4 g (clairement inférieure à la masse d'un kiwi) ou de 2 kg (supérieure à la masse des fruits dans le panier) devraient, au contraire, déclencher une nouvelle régulation.
L'élève peut alors communiquer la réponse de façon claire : « La masse de kiwis dans le panier est de 400 g. »

Focus | Analyser les erreurs des élèves pour adapter l'aide à leur apporter

L'intérêt principal de la décomposition en quatre phases proposée dans ce chapitre est de fournir aux professeurs un outil pour structurer l'analyse des productions d'élèves en résolution de problèmes afin d'accompagner les apprentissages.

Situation : Dans une classe de CM2 (période 2), un professeur a préparé quatre problèmes à résoudre pour les élèves. Les problèmes sont découpés individuellement sur des petites feuilles déposées sur le bureau, de façon à ne pas décourager les élèves par un travail qui leur semblerait trop lourd et éviter qu'ils ne dispersent leur attention entre les différents problèmes. Les élèves qui ont terminé un problème viennent spontanément chercher le suivant sur le bureau. Ce fonctionnement est habituel au sein de la classe. Les élèves sont invités à travailler individuellement. L'objectif premier de cette séance est de faire travailler les élèves sur les opérations posées de nombres décimaux : addition et soustraction étudiées au CM1 et multiplication qui vient d'être introduite[50].

Le premier de ces problèmes est le suivant :

> « *Un électricien dispose d'un rouleau de fil électrique de 50 m. Il découpe trois morceaux de fil de ce rouleau de 12,70 m chacun.*
> *Quelle longueur de fil électrique reste-t-il dans le rouleau ?* »

Le professeur circule dans les rangs, crayon à la main pour valider les réussites. Les traces écrites de six élèves ont été reproduites ci-dessous :

<table>
<tr><th>Élève 1</th><th>Élève 2</th></tr>
<tr>
<td>

$$\begin{array}{r} 1\overset{2}{2},70 \\ +\ 12,70 \\ +\ 12,70 \\ \hline 38,10 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5_{1}0,_{1}00 \\ -\ 3_{1}8_{1},10 \\ \hline 1\ 1\ ,90 \end{array}$$

La longueur du fil dans le rouleau est 11,90 m.

</td>
<td>

50 m

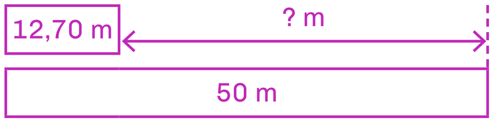
| 12,70 m | 12,70 m | 12,70 m | ? m |

$$\begin{array}{r} 1\overset{2}{2},70 \\ +\ 12,70 \\ +\ 12,70 \\ \hline 38,10 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 50 \\ -\ 38,10 \\ \hline 12,10 \end{array}$$

Il reste 12,10 m de fil électrique.

</td>
</tr>
</table>

50 — Une vidéo d'une séance similaire proposée en cycle 2 est disponible sur le site https://pedagogie-nord.ac-lille.fr/formations/plan-maths/cycle2/ sous l'appellation « Une séance de numération dans une classe de CP » (https://pedagogie-nord.ac-lille.fr/formations/plan-maths/cycle2/docs/num-calcul/c2-num-calc-seance-cp.zip).

Élève 3	Élève 4
 $5_{1}0,_{1}00$ $-\ 1_{1}2_{1},70$ 3 7 ,30 m	

Élève 5	Élève 6
50,00 + 12,70 62,70 m Ça fait 62,70 m.	$12,\overset{2}{7}0$ x 3 38,10 $5_{1}0,_{1}00$ $-\ 3_{1}8_{1},10$ 1 1 90 Il lui reste 1 190 m de fil électrique.

Un rapide regard sur les productions écrites permet au professeur de catégoriser les réponses des élèves (R : réussi, PR : partiellement réussi, NR : non réussi, NT : non traité) :

	Compréhension et modélisation	Calculs	Réponse
Élève 1	R L'élève a effectué les opérations attendues.	R	R
Élève 2	R L'élève a effectué les opérations attendues en s'appuyant sur un schéma pertinent.	PR L'addition des trois nombres décimaux est juste, la soustraction est erronée, il manque une étape dans la réalisation de l'algorithme consistant à écrire les deux nombres à soustraire avec autant de chiffres après la virgule.	PR La réponse est erronée mais correspond à ce qui a été trouvé par calcul. Il a manqué une régulation qui aurait par exemple pu consister à rejeter la réponse avec l'argument suivant : « 50 – 38 = 12, donc 50 – 38,10 doit être inférieur à 12... ».

	Compréhension et modélisation	Calculs	Réponse
Élève 3	PR Le schéma laisse penser que l'élève n'a compris la situation que partiellement : un seul morceau est retiré au lieu de trois. Ce schéma, d'ordinaire associé à une situation de comparaison, n'est pas celui attendu (voir chapitre 4) mais il aurait pu permettre d'aboutir.	R L'élève montre qu'il sait soustraire deux nombres décimaux en posant l'opération.	NT On ne peut pas savoir ici si l'élève n'a pas encore eu le temps de répondre, ou s'il a oublié de répondre.
Élève 4	NT	NT	NT
Élève 5	NR L'élève a additionné les deux longueurs présentes dans l'énoncé.	PR L'opération effectuée est correcte, mais les compétences démontrées dans le cadre des opérations posées sont d'un niveau inférieur à celui attendu : addition avec retenues et soustraction.	NR La réponse proposée n'a pas été régulée par rapport à la situation initiale : il n'y a pas de questionnement sur la cohérence entre le résultat (il reste plus de 62 m de fil) et l'histoire racontée dans l'énoncé (la longueur de fil initiale est de 50 m).
Élève 6	R L'élève a effectué les opérations attendues.	PR La multiplication est correctement posée et effectuée, la soustraction est correctement traitée, si ce n'est l'oubli de la virgule.	NR La réponse proposée n'a pas été régulée : pas de cohérence entre le résultat et les données de l'énoncé.

Exemples d'actions du professeur qui circule dans les rangs, d'élève en élève :

Élève 1 : Le professeur félicite l'élève, valide par écrit la réponse proposée et demande à l'élève de résoudre les problèmes suivants.

L'objectif de cette validation écrite est, en plus d'un signe d'encouragement pour l'élève qui développe ainsi un sentiment de compétence qui l'aide à avancer, un moyen pour le professeur de repérer ce qui a été validé, afin de ne pas avoir à relire ce qui a déjà été validé lors d'un deuxième tour de classe et ainsi de repérer l'avancée des travaux de l'élève.

Élève 2 : Le professeur félicite l'élève pour son travail, il valide par écrit le schéma et l'addition. Il invite l'élève 1 et l'élève 2 à confronter leurs deux soustractions et à comprendre pourquoi la réponse de l'élève 2 est erronée, de manière à pouvoir l'expliquer en fin de séance à toute la classe.

L'objectif du professeur, en invitant les deux élèves à travailler ensemble, est de consacrer un minimum de temps à cet élève 2, qui est manifestement en réussite sur les phases de compréhension et de modélisation, pour avoir plus de temps pour les élèves nécessitant davantage d'accompagnement. Le professeur a prévu de revenir sur ce point délicat pour plusieurs élèves lors du temps de correction en fin de séance.

Élève 3 : Le schéma correspond à une situation de comparaison, ce qui n'est pas le cas ici, sauf à considérer que l'on compare un rouleau neuf de 50 m au rouleau que l'on est en train de découper, ce qui peut être considéré comme acceptable. Mais l'élève n'a pris en compte qu'un morceau au lieu des trois attendus. Un échange s'engage :

— Est-ce que tu peux m'expliquer ce qui se passe dans ce problème ? Quelle est l'histoire ?
— Ben, c'est un électricien, il a découpé un fil.
— Qu'est-ce qu'il a découpé exactement ?
— Il a découpé un fil électrique de 12,70 mètres.
— Quelle est la phrase du problème qui te permet de dire cela ? Tu peux me la lire ?

L'élève 3 lit la phrase « Il découpe trois morceaux de fil de ce rouleau de 12,70 mètres chacun. »

— Ah ! Je me suis trompé.
— Pourquoi t'es-tu trompé ?
— En fait, il en découpe trois et moi je n'en ai enlevé qu'un.
— Très bien. Alors je te laisse corriger sur ton cahier.

Le professeur n'écrit rien sur le cahier de l'élève, les traces écrites qu'il laisse n'étant destinées qu'à valider les réussites dans un souci de motivation et d'encouragement, et pour bien montrer que l'on est en train d'apprendre, qu'il est normal de se tromper et qu'on a le droit de se reprendre.

La place des erreurs dans la construction des connaissances est ici essentielle, à condition qu'elles soient analysées et que l'élève, en raisonnant, puisse en tirer de nouvelles connaissances et ainsi réajuster la suite de son travail.

Élève 4 : Le professeur interroge l'élève :

— Alors qu'est-ce qui ne va pas ? Est-ce que tu peux m'expliquer ce qui se passe dans ce problème ? Que raconte cette histoire ?
— Je ne comprends pas.
— Tu attends un tout petit peu, je finis de regarder les cahiers de tes camarades et on regarde cela ensemble.

Le professeur prend note des difficultés de l'élève dans la phase de compréhension de l'énoncé. Le travail à mener est conséquent et se situe sur le plan même de la construction d'une représentation de la situation suffisamment élaborée pour se prêter ensuite à une modélisation. Il décide de le mener en commun pour tous les élèves de la classe concernés en les regroupant afin de traiter cette difficulté de façon ciblée tandis que les autres élèves poursuivent la résolution d'autres problèmes.

Élève 5 : Le professeur interroge l'élève :

— Est-ce que tu peux m'expliquer ce qui se passe dans ce problème ? Quelle est l'histoire ?
— Ben, c'est un monsieur qui découpe du fil électrique.
— D'accord et qu'est-ce qu'on cherche dans ce problème ? Qu'est-ce qu'on cherche à savoir ?
— Je ne sais pas.
— Quels sont les calculs que tu as faits ?
— J'ai fait une addition.
— D'accord. Pourquoi as-tu fait une addition ?
— Je ne sais pas.
— Et bien, tu attends quelques minutes, je finis de regarder les cahiers de tes camarades et on regarde cela ensemble.

Le professeur prend note des difficultés de l'élève dans la phase de compréhension et de modélisation du problème. Une difficulté possible ici se situe sur le plan de la représentation de la situation. L'élève se focalise sur des aspects thématiques et n'a pas pris en compte les dimensions pertinentes sur le plan mathématique, à savoir l'itération d'un découpage de trois morceaux de fil d'une même longueur, extraits d'un rouleau dont la longueur est connue également. Cet élève fera partie du sous-groupe accompagné spécifiquement.

Élève 6 : Le professeur interroge l'élève :

— Est-ce que tu peux me dire ce qu'on cherche dans ce problème ?
— On veut savoir le fil qui reste.
— « Le fil qui reste ». Mais, ce qu'il reste de fil où exactement ?
— Dans le rouleau.
— Le rouleau. Il mesure combien au départ ce rouleau ?
— 50 mètres.
— Et il reste combien de mètres à la fin ?
— Ah je me suis trompé. Ça fait trop.
— Où est-ce que tu t'es trompé ?
— Je sais pas.
— Ta multiplication est juste. Les trois morceaux mesurent bien 38,10 mètres en tout.

Le professeur valide avec son stylo la multiplication.

— Ah, je sais, j'ai oublié la virgule.
— Je te laisse corriger et je reviens te voir tout à l'heure.

La démarche est explicite. L'élève est en réussite et la validation est faite oralement.

Le professeur termine son tour de classe rapidement, puis prend en charge, à part, les six élèves de la classe (dont les élèves 4 et 5) pour lesquels la compréhension de la situation ne permet pas de modélisation.

Un temps de remédiation de près de 10 minutes est consacré à ces six élèves, immédiatement après le premier tour de classe, afin de leur permettre de disposer d'un temps suffisant pour résoudre le problème à l'issue de ce travail de remédiation. Le reste de la classe continue de résoudre les différents problèmes proposés. L'objectif du professeur est de travailler sur la compréhension du problème et de commencer à mettre en avant des éléments supports de modélisation. Le professeur doit apprendre aux élèves à distinguer « Je n'ai pas compris », « Je n'ai pas d'idées » et « Je ne sais pas répondre à la question ». Dans un premier temps, le travail ne porte que sur la compréhension de l'énoncé ; ceci demande une vigilance du professeur pour s'assurer que certains élèves ne dévoilent pas trop d'informations sur la résolution du problème en répondant aux questions qui leur sont posées.

Le professeur commence par faire lire à voix haute l'énoncé du problème par un élève.

— Tout le monde a bien entendu. On le réécoute une deuxième fois.

Un autre élève le lit à voix haute.

— Alors de quoi parle ce problème ?
— Ça parle d'un électricien.
— C'est quoi un électricien ?
— C'est un monsieur qui fait de l'électricité ?
— Pas tout à fait. Est-ce que quelqu'un peut préciser ?
— Mon tonton, il est électricien.
— Oui et alors, il fait quoi ?
— Je ne sais pas.
— Électricien, déjà c'est un métier, et une personne qui est électricien, ou électricienne si c'est une femme, c'est une personne qui va s'occuper de l'installation électrique d'une maison ou d'un appartement, c'est-à-dire de tous les fils à l'intérieur des murs qui amènent l'électricité dans les prises. Alors, que fait l'électricien dans notre problème ?
— Il découpe un fil.
— Oui, il découpe un fil. Il le découpe dans quoi ce fil ?
— Dans un rouleau.
— Et que sait-on sur ce rouleau ?
— C'est un rouleau de fil électrique de 50 mètres.
— Très bien. Regardez ! Je vous ai apporté une ficelle enroulée, on va dire que c'est notre rouleau de 50 mètres.

Le professeur présente aux élèves une petite pelote de ficelle d'environ un mètre de long.

— Que fait l'électricien avec ce fil ?
— Il le découpe.
— Qu'est-ce qu'il découpe précisément ? Relisez l'énoncé du problème.
— Trois morceaux de fil de 12,70 mètres chacun.
— Très bien. On va dire que ça, ça mesure 12,70 mètres.

Le professeur présente une baguette en bois d'une dizaine de centimètres.

— Est-ce que vous pouvez faire avec notre rouleau [le professeur montre la ficelle], ce que fait l'électricien avec son rouleau de fil ?

Une discussion s'engage entre élèves, deux élèves découpent trois morceaux de ficelle de la longueur de la baguette.

— Très bien. Maintenant, est-ce que vous pouvez me dire ce que l'on cherche dans notre problème ?
— Ce qui reste dans le rouleau.
— Oui et à quoi cela correspond-il pour notre ficelle ?

Un élève montre le reste de ficelle.

— Oui. Très bien. Ça c'est ce qui nous reste dans notre rouleau. Quelle était la longueur du rouleau au début, avant qu'on découpe du fil ?
— 50 mètres.
— Et qu'est-ce qu'on a fait ?
— On a découpé.
— Oui, mais qu'est-ce qu'on a découpé très précisément ?
— Trois morceaux de 12,70 mètres.
— Alors quels calculs faut-il faire ?
— Une soustraction.
— On fait 50 moins 12,70.
— On a enlevé qu'une fois 12,70 mètres ?
— Non, trois fois.
— Et alors ?
— Il faut enlever trois fois 12,70 mètres.
— Oui, en effet, il va falloir soustraire 3 fois 12,70 mètres. Bon on s'arrête là. Vous allez retourner à vos places. Vous allez faire un schéma qui raconte l'histoire, qui raconte ce que fait l'électricien comme on l'a vu à l'instant. Puis après, vous allez faire les calculs. Allez, c'est parti.

Le professeur a fait le choix de ne pas agir sur les nombres en jeu, notamment en remplaçant la longueur des morceaux découpés par un entier, car son objectif premier au sein de la séance est de travailler sur le calcul posé avec des nombres décimaux. Il retourne ensuite faire un nouveau tour de classe complet pour voir le travail de chacun des autres élèves pendant que les six élèves suivis spécifiquement se lancent dans une nouvelle tentative de résolution.

La séance se poursuit ensuite avec la résolution des problèmes suivants, chaque élève allant à son rythme. Le professeur a le temps de repasser une troisième fois consulter le travail de chacun avant d'interrompre le travail de la classe pour un temps de correction et de mise en commun permettant de revenir très brièvement sur la technique apprise précédemment pour la soustraction posée de deux nombres décimaux, avec l'exemple de la soustraction posée 50 – 38,10 du premier problème, qui a été validé pour tous les élèves dans le cahier, avant de corriger en détail le deuxième problème. Les suivants ne sont corrigés que dans les cahiers des élèves qui ont pu les traiter.

En résumé

La résolution d’un problème peut être vue comme un processus en quatre phases, qui ne se succèdent pas de manière stricte, mais qui sont en interaction permanente.

- **Comprendre** : l’élève doit comprendre le texte du problème, c’est-à-dire comprendre l’histoire que raconte le problème. À cela s’ajoute une compréhension spécifique aux problèmes mathématiques : comprendre la question, identifier précisément ce qui est cherché.

- **Modéliser** : l’élève doit traduire la situation comprise, l’histoire qui se situe dans le monde réel, dans un format pertinent sur le plan mathématique, par exemple un tout composé de parties, permettant de déduire des opérations mathématiques à effectuer pour répondre à la question posée.

- **Calculer** : l’élève doit effectuer les calculs identifiés à l’étape précédente. Ces calculs peuvent être effectués mentalement, en ligne ou en posant les opérations.

- **Répondre** : l’élève doit interpréter les résultats des opérations mathématiques dans le contexte du problème, en effectuant une régulation par rapport à la situation initialement comprise. Cette étape nécessite de mobiliser des compétences en communication pour produire une réponse intelligible par tous.

III

Identifier les obstacles à la résolution de problèmes pour les élèves

Ces dernières décennies, de nombreux travaux de recherche ont porté sur ce qui fait obstacle à la réussite des élèves lors de la résolution de problèmes. Ces éléments sont multiples et il est indispensable qu'ils soient connus du professeur.

L'objectif n'est pas d'épurer les problèmes de tout ce qui peut être source de difficultés pour les élèves, mais de les identifier et de les contrôler. Ceci doit permettre de s'assurer que les problèmes à résoudre sont accessibles aux élèves à qui ils sont proposés, tout en les aidant à développer de nouvelles compétences en les confrontant progressivement à de nouveaux obstacles. Cela donne également le moyen de saisir pourquoi un énoncé est plus difficile qu'un autre. Une connaissance fine de ce qui pose des difficultés aux élèves permet aussi, en cas de difficultés rencontrées lors de la résolution de problèmes, de fournir les coups de pouce utiles à chacun, sans dénaturer les tâches dévolues aux élèves.

La structure mathématique du problème

L'ensemble des structures de problèmes pouvant être proposées aux élèves de cours moyen est large ; il n'est pas possible d'être exhaustif sur ce point, même si le chapitre 1 a permis de circonscrire les caractéristiques des problèmes devant être proposés à ce stade de la scolarité : problèmes en une étape, problèmes en plusieurs étapes et problèmes atypiques, chacune de ces catégories étant elle-même subdivisée en sous-catégories. De façon générale, **les problèmes atypiques sont plus difficiles à traiter pour les élèves que les problèmes à étapes**, car ils leur sont moins familiers, mais les exceptions sont nombreuses.

Ainsi le problème atypique ci-dessous, relevant de la catégorie des problèmes algébriques, est particulièrement difficile à traiter pour les élèves de cours moyen s'ils n'ont pas bénéficié d'un enseignement spécifique pour acquérir les outils et les compétences utiles pour sa résolution (ces outils seront présentés au chapitre 4).

> « *Agathe et Ben ont dépensé 65 €. Agathe et Chloé ont dépensé 185 €. Chloé a dépensé trois fois plus que Ben. Combien Agathe a-t-elle dépensé ?*[51] »

Pour les problèmes à étapes, généralement, **plus les étapes sont nombreuses plus la difficulté est importante**. Ainsi, le problème en deux étapes ci-dessous pose assez naturellement plus de difficultés que le problème en une étape proposé ensuite :

— « *Alice achète trois livres coûtant 5,70 € chacun. Elle donne 20 € à la libraire. Combien la libraire va-t-elle lui rendre ?* »
— « *Alice achète un livre coûtant 5,70 €. Elle donne 20 € à la libraire. Combien la libraire va-t-elle lui rendre ?* »

Un problème comme celui présenté ci-dessous, portant sur un champ numérique élémentaire, relevant du CP, et à l'énoncé relativement simple, peut être source de difficultés pour les élèves de cours moyen, car il nécessite de traiter plusieurs étapes :

> « *Un jardinier achète 9 rosiers à 4 € pièce et 3 sapins à 17 € pièce. Quel est le montant de sa dépense ?* »

Pour ce problème en trois étapes, les calculs sont *a priori* accessibles à des élèves de CP par des additions itérées. Il relève cependant plus du cours élémentaire, car la multiplication permet de traiter efficacement les deux premières étapes. Il a été proposé en janvier 2011 dans le cadre d'une évaluation nationale de CM2 ; un tiers des élèves n'a pas réussi à le résoudre et plus de la moitié (52 %) des élèves de RAR[52].

Le nombre d'étapes n'est toutefois pas le seul facteur de difficulté. En effet, des problèmes à une seule étape sont de difficulté différente en fonction de ce qui est connu et de ce qui est cherché. Ceci a été précisément illustré par les travaux de Riley mentionnés au chapitre 1[53], qui montrent bien l'inégale difficulté des problèmes additifs en une étape pour les élèves de cycle 2. Il est généralement plus facile, pour les élèves, de trouver un tout en connaissant les différentes parties que de retrouver une partie en connaissant le tout et l'autre partie.

Exemples :

— Problème de recherche du tout :
« *J'ai acheté 6,4 kg de pommes et 3,8 kg de poires. Quelle est la masse de fruits achetés ?* »

— Problème de recherche d'une partie :
« *J'ai acheté 6,4 kg de fruits. Il y a des pommes et 3,8 kg de poires. Quelle est la masse de pommes achetées ?* »

---

51 — Berinderjeet Kaur, "The Why, What and How of the 'Model' Method: A Tool for Representing and Visualising Relationships When Solving Whole Number Arithmetic Word Problems", *ZDM – Mathematics Education*, n° 51, Springer, 2018.
52 — Réseau ambition réussite (à peu près équivalent aux écoles en REP+ aujourd'hui).
53 — Voir p. 21.

Il est également plus facile pour les élèves de trouver un état final qu'un état initial dans un problème où une grandeur évolue, et ceci, indépendamment de l'opération en jeu (addition ou soustraction).

Exemples :

— Problème de recherche d'un état final :
« *Maya avait 17,5 L d'essence dans sa moto. Elle en a consommé 13,7 L. Quel volume d'essence y a-t-il maintenant dans la moto de Maya ?* »

— Problème de recherche d'un état initial :
« *Maya vient de rajouter 13,7 L d'essence dans sa moto pour faire le plein. Il y a maintenant 17,5 L d'essence dans le réservoir. Quel volume d'essence y avait-il dans la moto avant que Maya ne fasse le plein ?* »

Le texte de l'énoncé du problème

Comme pour un texte proposé en français, en sciences ou dans toute autre discipline, **la compréhension d'un énoncé de problème peut représenter un obstacle**. L'élève peut ainsi avoir des difficultés à saisir, à partir du texte de l'énoncé, ce qu'est la situation, c'est-à-dire ce qui se passe dans l'histoire que raconte cet énoncé et ce qui est demandé. Plusieurs éléments du texte de l'énoncé peuvent ainsi constituer des obstacles à cette bonne compréhension :

— le degré de familiarité de l'élève avec l'environnement du problème : familiarité avec le contexte, familiarité avec le lexique lié à ce contexte, etc. ;
— la longueur et la forme de l'énoncé : les textes peuvent devenir plus longs au cours moyen et les informations à prélever plus nombreuses ;
— la présence d'illustrations qui généralement ne facilitent pas la tâche des élèves ;
— le lexique spécifique aux mathématiques ;
— des mots-clés de l'énoncé concordants ou non avec la modélisation : présence de mots comme « plus », « perdre », « fois », « partager » qui incitent fortement à effectuer une opération en particulier ;
— un scénario, évoqué par l'énoncé, facilitant ou non la perception des relations mathématiques en jeu : relations entre les entités présentes dans l'énoncé, relations décrites au sein de l'énoncé ou à construire par l'élève, etc. ;
— l'inscription ou non dans le champ de validité de la conception intuitive des opérations : par exemple des problèmes de gains pour lesquels il faut effectuer une soustraction ne sont pas inscrits dans ce champ de validité ;
— la présence de données inutiles.

Le degré de familiarité de l'élève avec l'environnement du problème

Une première source de difficulté est l'absence de familiarité de l'élève avec l'environnement dans lequel se situe l'action du problème et, en particulier, avec le lexique utilisé dans l'énoncé. Il s'agit aussi d'une difficulté pour le professeur : un univers qui peut lui sembler familier, car s'appuyant sur son vécu personnel, peut ne pas l'être du tout pour certains élèves.

La compréhension du problème sera généralement plus aisée si l'univers de référence sur lequel porte le problème est familier des élèves. Ainsi le problème ci-dessous, portant sur le football, sera certainement plus accessible aux élèves français que le problème équivalent, issu de l'univers du curling, proposé ensuite.

- « *Le capitaine frappe la balle juste avant la ligne de milieu de terrain. Le ballon s'immobilise 45,5 m plus loin dans les pieds de l'avant-centre, situé à 2,5 m du point de penalty, celui-ci tire en direction du but, le ballon s'immobilise alors dans les bras du gardien après avoir parcouru 8,3 m.*
  Quelle distance totale a parcouru le ballon ? »
- « *Le skip lâche le marteau juste avant la ligne de hog. La pierre d'ailsite heurte une pierre adverse 26,9 m plus loin, puis poursuit sa route en direction de la maison, la pierre s'immobilise à 0,8 m du champagne, après avoir parcouru 3,4 m.*
  Quelle distance totale a parcouru la pierre ? »

Il pourra souvent être intéressant de créer des problèmes directement en lien avec les activités des élèves et les événements vécus par la classe : activités pratiquées dans le cadre de l'EPS, sorties organisées, activités menées en sciences, etc.

L'absence de connaissance des entités dont il est question dans l'énoncé du problème peut rendre impossible la régulation nécessaire lors de la quatrième phase de la résolution du problème (répondre).

> « *Aujourd'hui, j'ai trouvé 35 bigorneaux. Ensemble, ils pèsent 480 g. En supposant qu'ils ont tous la même masse, trouve combien pèse un bigorneau.* »

Un élève effectuant le calcul : 480 g x 35 = 16 800 g = 16,8 kg ne sera nullement alerté par l'absurdité de la masse trouvée, s'il n'a aucune idée de ce qu'est un bigorneau.

La longueur et la forme de l'énoncé

Au cycle 2, les élèves sont assez rarement exposés à des problèmes dont l'énoncé s'étale sur plus de trois lignes, ce qui fait qu'au cours moyen, un énoncé plus long, par exemple avec plus de quatre données numériques, peut se révéler difficile à traiter pour certains élèves.

« *Un spectacle musical avec cinq artistes est proposé au directeur d'une école. Il faut payer les artistes 50 euros chacun. Il faut aussi payer leur déplacement, soit 200 euros au total. Il n'y a pas d'autres frais. L'association de parents d'élèves donne une aide de 110 euros et la mairie accorde une autre aide de 240 euros. Si les 50 élèves de cette école assistent au spectacle, quelle participation financière doit être demandée à chaque élève pour payer la dépense restante ?* »

Il est important de confronter les élèves dès le début du cours moyen à des énoncés de problèmes de plus de deux ou trois lignes sans complexité particulière au-delà de la longueur, afin de leur apprendre à ne pas être déstabilisés par de tels énoncés et à structurer les données pour pouvoir répondre à la question posée.

D'autres éléments peuvent être de nature à faciliter ou, au contraire, à rendre plus complexe la compréhension du problème. Par exemple, la position de la question en début d'énoncé peut être facilitatrice pour certains élèves[54], en les invitant dès la première lecture à se concentrer sur un objectif précis. Les problèmes dont les données sont organisées dans l'ordre où elles sont utiles sont aussi généralement plus aisés à résoudre.

La présence ou non d'illustrations

Les illustrations sont souvent vues comme un moyen d'aider les élèves à mieux comprendre les énoncés qui leur sont soumis. Différentes études montrent que cela n'est pas toujours le cas : les illustrations peuvent parfois distraire les élèves, plus que les soutenir dans la résolution du problème. Par ailleurs, des illustrations contenant une partie des informations nécessaires pour résoudre le problème, comme dans l'énoncé ci-dessous, nécessitent des allers-retours entre le texte et la ou les illustrations qui augmentent la difficulté à résoudre le problème.

Exemple :

« *Jacques et Henri, âgés de 17 et 20 ans, plantent leur tente pour deux semaines dans le camping des Trois Chênes. Combien paieront-ils ?* »

CAMPING DES TROIS CHÊNES	
Tarif par semaine	
Adulte	54 €
Enfant (jusqu'à 10 ans)	21 €
Emplacement pour une caravane	40 €
Emplacement pour une toile de tente	22 €
Animaux autorisés	*gratuit*

54 — Michel Devidal, Michel Fayol, Pierre Barrouillet, « Stratégies de lecture et résolution de problèmes arithmétiques », *L'Année psychologique*, Vol. 97, n° 1, PUF, 1997.

Pour ce problème, le contexte du camping peut bien évidemment être un obstacle pour certains élèves, mais une difficulté supplémentaire est liée à la nécessité de faire le lien entre l'énoncé, qui est pourtant très court, et l'illustration contenant les tarifs. En effet, il faut s'appuyer simultanément sur les deux sources d'information pour établir le prix à payer : deux tarifs « adulte » (Jacques est mineur, mais le tarif « enfant » est pour les enfants jusqu'à 10 ans, il est donc considéré comme « adulte » contrairement à ce que le langage courant indique habituellement), une tente (qualifiée de « toile de tente » dans le tableau), deux semaines (à lier avec « Tarif par semaine »). Comme pour le problème précédent, les mathématiques sous-jacentes relèvent du CE1 ; ce problème pose néanmoins encore des difficultés à certains élèves de CM2, avec un taux de réussite de 49 % lors des évaluations nationales de janvier 2011 (30 % en RAR[55]).

Dans une étude réalisée aux Pays-Bas avec des élèves en cinquième année d'école primaire (équivalent du CM2), des chercheurs[56] ont proposé des problèmes très simples, en une étape, accompagnés ou non d'une illustration :

- des problèmes bruts, sans illustration ;
- des problèmes accompagnés d'une illustration décorative, qui n'apporte pas d'information utile ;
- des problèmes accompagnés d'une illustration qualifiée d'aidante, car elle illustrerait les informations données dans le problème ;
- des problèmes accompagnés d'une illustration qualifiée d'essentielle, car une partie des informations nécessaires pour résoudre le problème sont présentes uniquement dans l'illustration.

Les figures ci-dessous présentent quatre de ces problèmes utilisés dans cette recherche.

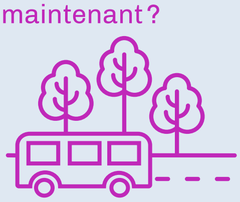
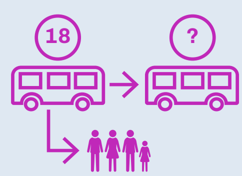
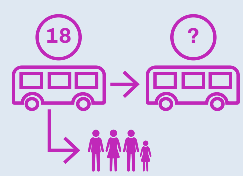
Brut	Inutile	Aidante	Essentielle
Il y avait 18 personnes dans le bus. 4 personnes sont sorties. Combien de personnes sont dans le bus maintenant ?	Il y avait 18 personnes dans le bus. 4 personnes sont sorties. Combien de personnes sont dans le bus maintenant ?	Il y avait 18 personnes dans le bus. 4 personnes sont sorties. Combien de personnes sont dans le bus maintenant ?	Il y avait 18 personnes dans le bus. Des personnes sont sorties. Combien de personnes sont dans le bus maintenant ?
			
Réponse =	Réponse =	Réponse =	Réponse =

Figure 5. L'impact des illustrations sur la résolution de problèmes.

55 — Réseau ambition réussite (à peu près équivalent aux écoles en REP+ aujourd'hui).

56 — Inez Berends, Ernest C. D. M. Van Lieshout, "The Effect of Illustrations in Arithmetic Problem-solving: Effects of Increased Cognitive Load", *Learning and Instruction*, n° 19, 2009.

Les chercheurs se sont intéressés aux effets de ces représentations sur la réussite à ces problèmes en distinguant deux groupes d'élèves : ceux forts en calcul et ceux faibles en calcul.

Ils ont mis en avant une absence d'impact de la présence de l'illustration inutile tant pour les élèves forts que pour les élèves faibles en calcul. Ils ont également mis en avant un effet négatif de l'illustration essentielle qui conduit à une chute des réussites tant pour les élèves forts que pour les élèves faibles. Le fait de devoir confronter l'énoncé du problème à l'illustration engendre vraisemblablement une surcharge cognitive pour les élèves, ce qui réduit leur réussite. Il faut également comprendre que les quatre personnages dessinés sont inclus dans les « 18 » indiqués sur le bus, ce qui peut être aussi considéré comme ambigu.

Dans le cas de l'illustration qualifiée d'aidante, les chercheurs n'ont pas constaté d'effet sur la réussite des élèves forts, mais ils ont constaté un effet négatif sur celle des élèves faibles en calcul. Ce résultat contre-intuitif laisse penser que, pour les élèves les plus fragiles, une illustration reprenant les informations de l'énoncé n'agit pas comme un élément facilitateur, mais au contraire, ajoute de la complexité en augmentant la charge cognitive, en multipliant les sources d'information.

Il semble donc raisonnable de ne pas chercher à illustrer à tout prix les problèmes proposés aux élèves et, lors des choix de manuels, de privilégier ceux ne multipliant pas les illustrations inutiles, aidantes ou même essentielles.

La présence d'éléments superflus

Beaucoup de travaux ont été menés en France dans les années 1990 sur l'influence qu'a la présence de données inutiles dans les énoncés de problèmes pour la réussite des élèves à les résoudre. Denis Butlen et Monique Charles-Pézard[57] proposent, par exemple, la liste de problèmes ci-dessous dans lesquels les francs ont été remplacés par des euros.

— « *Une famille de 3 personnes séjourne pendant 6 jours à la résidence "des 3 îles" ; le tarif journalier de la pension est de 45 € par personne.*
Calcule le montant de la dépense. »
— « *Marie fête son anniversaire le 22 septembre : elle a 11 ans. Elle dit à sa maman : "J'ai exactement 32 ans de moins que toi !"*
Quel est l'âge de Maman ? »
— « *Jean part de Paris, il doit passer par Melun et être à Fontainebleau à 10 heures ; la distance Paris-Fontainebleau est de 65 km et il y a 15 km de Melun à Fontainebleau.*
Quelle est la distance entre Paris et Melun ? »
— « *Pour Noël, Jean, qui dispose de 84 €, a décidé d'offrir le même livre à ses 4 amis ; il paye 74 €.*
Quel est le prix d'un livre ? »

57 — Denis Butlen, Monique Charles-Pézard, « Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté. Le calcul mental entre sens et technique », *Grand N*, n° 79, 2007.

— « *Un rallye cycliste comporte 105 km ; le départ est à 7 heures le matin ; les relais sont distants de 5 km ; chaque participant doit pointer au départ, à chaque relais, et à l'arrivée.*
  Combien de fois doit-il pointer ? »
— « *Un restaurant propose un menu du jour à 18 € ; il y a 4 choix possibles pour l'entrée, 3 choix possibles pour le plat principal et 2 choix possibles pour le dessert. Combien de menus différents (entrée-plat-dessert) peut-on constituer ?* »

Cette présence de données inutiles a un effet négatif sur la réussite du traitement de ces problèmes par les élèves. D'une part, ces données supplémentaires augmentent la charge cognitive des élèves lors de la résolution, rendant plus difficiles la compréhension et la modélisation du problème. D'autre part, les élèves qui ne s'inscrivent pas dans une démarche de compréhension du problème, mais prennent simplement les données de l'énoncé et s'en servent pour effectuer un calcul choisi plus ou moins aléatoirement, sont mis en échec, alors qu'ils auraient pu obtenir un résultat correct avec leur démarche erronée sans la présence de données inutiles.

Proposer des problèmes avec des données inutiles est donc particulièrement intéressant pour repérer des difficultés d'élèves qui risqueraient de ne pas être décelées lors du traitement d'un problème en une étape avec deux données numériques. Cependant, il n'est sans doute pas souhaitable d'en faire une tâche technique, qui consisterait à repérer les données inutiles et les données utiles dans des énoncés de problèmes. En résolution de problèmes, la tâche dévolue aux élèves est et doit rester celle de résoudre des problèmes. Lors des temps de mise en commun, il est cependant intéressant de mettre la focale sur la présence de ces données numériques, écrites en chiffres ou en lettres, qui ne sont pas utiles pour répondre à la question posée.

Le lexique et, en particulier, le lexique spécifique aux mathématiques

Ce point est en lien direct avec le paragraphe sur la familiarité de l'élève avec l'environnement du problème ; un environnement peu familier à un élève risque de conduire à la confrontation d'un lexique méconnu. Les difficultés liées au lexique nécessitent une grande vigilance du professeur lors du choix des problèmes. Un temps de résolution de problèmes ne doit pas être vu comme une opportunité de faire acquérir de nouveaux mots aux élèves. Certaines séances de résolution de problèmes commencent parfois par de longues explications sur le texte de l'énoncé et le lexique qu'il contient. Cette pratique est généralement à éviter, car elle éloigne les élèves de l'objectif visé par les séances de résolution de problèmes. Elle est particulièrement ennuyeuse pour les élèves qui ont souvent perdu toute motivation à résoudre le problème lorsque les longues explications cessent. La résolution de problèmes peut néanmoins être une occasion de réinvestir des mots nouveaux, appris récemment, et qu'il est utile de faire rencontrer régulièrement aux élèves pour qu'ils se les approprient.

Une fois le problème résolu, le professeur peut revenir sur des points de lexique qui posaient souci sans que cela n'ait été anticipé. Par exemple, pour le problème de Gabin vu dans la partie « Comprendre » du chapitre 2 (« *Gabin a réalisé un bouquet de fleurs. Un quart sont des roses, un tiers sont des œillets et les 10 autres fleurs sont des marguerites. Combien y a-t-il de fleurs dans le bouquet de Gabin ?* »), il peut montrer, grâce aux outils numériques présents dans la classe, des photos d'œillets ou de marguerites à des élèves qui ne connaissent pas ces fleurs. Ces éclairages doivent être accompagnés d'explications destinées à montrer que l'on pouvait résoudre le problème sans connaître ces fleurs, simplement en devinant qu'il s'agissait de fleurs puisque l'énoncé parlait de la constitution d'un bouquet de différentes fleurs. L'objectif est à nouveau de faire des inférences et ainsi d'outiller les élèves pour qu'ils puissent traiter un problème qui leur est proposé malgré d'éventuelles carences lexicales, en faisant des hypothèses qu'ils vérifieront ensuite.

Si les séances de résolution de problèmes ne doivent, *a priori*, pas avoir pour objectif de faire connaître de nouveaux mots, cela n'est pas vrai pour le lexique ou la langue spécifiques aux mathématiques qu'il va falloir faire découvrir, revoir et faire maîtriser aux élèves, dans le cadre de la résolution de problèmes. Par exemple, les expressions suivantes doivent faire l'objet d'une attention particulière :

— il en a 5 de plus ;
— il en veut au moins 6 ;
— il en a 3 fois plus ;
— il est inférieur à ;
— il est supérieur ou égal à ;
— il en a le triple ;
— il en donne le quart ;
— il en a autant ;
— la longueur du rectangle est le double de sa largeur…

Le maniement de ces expressions relationnelles peut être aussi l'occasion de travailler certains principes mathématiques. Par exemple, si « *Léa a 5 billes de plus que Sarah* », alors « *Sarah a 5 billes de moins que Léa* » ; si « *Léa a 5 fois plus de billes que Sarah* », alors « *Sarah a 5 fois moins de billes que Léa* ».

Les mots clés de l'énoncé (plus, moins, fois, etc.) concordant ou non avec la modélisation

Lors des classifications des problèmes en une étape dans les années 1980, les chercheurs ont mis en évidence une meilleure réussite lorsque l'opération attendue correspond, d'un point de vue sémantique, au lexique présent dans l'énoncé.

— **Problème 1** : « *Paul a 3 billes. Pierre a 5 billes de plus que Paul. Combien Pierre a-t-il de billes ?* »
— **Problème 2** : « *Paul a 3 billes. Paul a 5 billes de moins que Pierre. Combien Pierre a-t-il de billes ?* »

Ainsi, pour les deux problèmes précédents pour lesquels il faut calculer la même somme 3 + 5, Mary Riley *et al.*[58] ont obtenu une réussite de 100 % pour le premier exercice et de seulement 75 % pour le second avec des élèves en troisième année d'école élémentaire.

Le second exercice conduit en effet de nombreux élèves à effectuer la soustraction 5 – 3. Les processus conduisant à ce choix sont sans doute divers, avec des niveaux de compréhension variés ; pour certains élèves, cette réponse erronée révèle sans doute une difficulté à inhiber le réflexe conduisant à faire une soustraction en lisant le mot « moins » présent dans l'énoncé.

Ces éléments sont importants pour les problèmes soumis aux élèves lors des temps de formation, mais aussi et surtout en évaluation. Pour les trois problèmes ci-dessous, un mot de l'énoncé (« plus », « différence », « moins ») correspond au lexique de l'addition, pour le premier problème, et de la soustraction, pour les deux suivants. Une centration sur ces mots, indépendamment de toute autre chose, conduit à effectuer l'opération attendue. Un élève peut donc modéliser correctement le problème, en s'appuyant uniquement sur ce mot clé, sans avoir compris la situation et sans avoir réfléchi au modèle mathématique sous-jacent.

— « *Au marché, un ananas coûte 1,89 €. Une pastèque coûte 1,66 € de plus qu'un ananas.*
  Quel est le prix d'une pastèque ? »
— « *Au marché, un ananas coûte 1,89 € et une pastèque coûte 3,55 €.*
  Quelle est la différence de prix entre une pastèque et un ananas ? »
— « *Au marché, une pastèque coûte 3,55 €. Un ananas coûte 1,66 € de moins qu'une pastèque.*
  Quel est le prix d'un ananas ? »

Ces trois problèmes peuvent donc, dans certains cas, conduire à penser que des élèves savent résoudre correctement des problèmes de comparaison additive, alors que leur raisonnement est erroné. On peut alors parler de faux positif, comme on le ferait dans le cas d'un test médical. Si ce type de problèmes n'est pas à bannir, il faut cependant rester vigilant afin de ne pas risquer de valider des compétences qui ne sont pas acquises. Cela pose, de façon générale, la question de la manière dont les termes de l'énoncé influencent le choix de la stratégie de résolution de l'élève[59]. Le professeur peut ainsi, en évaluation, privilégier des problèmes évitant ces concordances, comme les problèmes ci-après :

— « *Au marché, un ananas coûte 1,89 €. Un ananas coûte 1,66 € de moins qu'une pastèque.*
  Quel est le prix d'une pastèque ? »
— « *Au marché, un ananas coûte 1,89 € et une pastèque coûte 3,55 €.*
  Combien une pastèque coûte-t-elle de plus qu'un ananas ? »
— « *Au marché, une pastèque coûte 3,55 €. Une pastèque coûte 1,66 € de plus qu'un ananas.*
  Quel est le prix d'un ananas ? »

58 — Voir chapitre 1.
59 — Gabriella Daroczy, Detmar Meurers, Juergen Heller, Magdalena Wolska, Hans-Christoph Nuerk, "The Interaction of Linguistic And Arithmetic Factors Affects Adult Performance on Arithmetic Word Problems", *Cognitive Processing*, n° 21, 2020.

L'inscription ou non dans le champ de validité de la conception intuitive des opérations

Depuis les années 1980, il est bien établi par la recherche que chaque notion mathématique est d'abord comprise par les élèves à travers des éléments de la vie quotidienne. Ainsi, la conception intuitive de l'addition est la recherche du résultat d'un gain ou d'un ajout, celle de la soustraction est la recherche du reste dans une situation de perte ou de retrait, celle de la multiplication est la répétition d'une suite d'additions du même nombre et celle de la division est la recherche de la taille de la part dans le contexte d'un partage équitable[60]. Ces conceptions intuitives sont utiles dans la mesure où elles permettent aux élèves de s'appuyer sur leurs connaissances préalables pour donner du sens à une notion, de mettre à profit leurs expériences passées pour faciliter leurs apprentissages. Mais elles vont aussi constituer un obstacle quand elles ne coïncideront pas avec la notion mathématique[61], par exemple, quand un problème mettant en jeu une perte nécessite de mobiliser une addition et non pas une soustraction, comme pour le problème ci-dessous.

> « *Alice a un trou dans sa poche. Elle a perdu 3,40 € pendant la randonnée. Il lui reste 13,80 €. Combien d'argent avait Alice au début de la randonnée ?* »

Un autre exemple est celui d'une multiplication avec un multiplicateur inférieur à 1, pour laquelle le produit sera donc inférieur au multiplicande, ce qui heurte la conception intuitive d'une multiplication qui est la répétition d'une suite d'additions du même nombre et qui dans ce cas donne donc un produit supérieur au multiplicande.

> « *Arsène achète 0,250 kg de Beaufort à 22 € le kilogramme. Combien d'euros va payer Arsène pour son morceau de Beaufort ?* »

Le tableau ci-après donne d'autres exemples de problèmes coïncidant ou non avec la conception intuitive des opérations.

60 — Jacques Lautrey, Sylviane Rémi-Giraud, Emmanuel Sander, Andrée Tiberghien, *Les Connaissances naïves*, Armand Colin, Paris, 2008.
61 — George Lakoff, Rafael Núñez, *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York, 2001.

Problèmes coïncidant avec la conception intuitive de l'opération	Problèmes non inscrits dans le champ de validité de la conception intuitive de l'opération
« Léa avait 18,45 €. Sa maman lui a donné 5 €. Combien d'argent a Léa maintenant ? »	*« La maman de Léa lui a donné 5 €. Léa a maintenant 18,45 €. Combien d'argent avait Léa avant de recevoir les 5 € de sa maman ? »*
« 108 coureurs prennent le départ d'une course. Il y a 85 abandons pendant la course. Combien de coureurs ont terminé la course ? »	*« 108 coureurs prennent le départ d'une course. Il y a beaucoup d'abandons. 85 coureurs seulement terminent la course. Combien de coureurs ont abandonné ? »*
« Quel est le prix de 4 litres d'essence si un litre d'essence coûte 1,22 euro ? »	*« Quel est le prix de 0,27 litre d'essence si un litre d'essence coûte 1,22 euro ? »*[62]
« Sept enfants se partagent équitablement 91 billes. Combien de billes va recevoir chaque enfant ? »	*« Des enfants se sont partagé équitablement 91 billes. Chaque enfant a reçu 7 billes. Combien y a-t-il d'enfants ? »*

Il est important de prendre en compte, dans les activités de résolution de problèmes, si la situation s'inscrit ou non dans le champ de validité de la conception intuitive de l'opération en jeu dans le problème. En effet, les réussites ne s'interprètent pas de la même façon selon que la conception intuitive de l'opération facilite ou non le ou les choix calculatoires pertinents. Il y a évidemment un enjeu fort à s'assurer que les situations travaillées en classe vont fréquemment au-delà des contextes où la conception intuitive est facilitante.

Un scénario, évoqué par l'énoncé, facilitant ou non la perception des relations mathématiques en jeu

De manière générale, il n'y a pas de neutralité entre les contenus des énoncés et les structures mathématiques sous-jacentes, dans la mesure où les relations qu'entretiennent les éléments d'un énoncé peuvent inciter à effectuer certaines opérations mathématiques. Par exemple, des billes de différentes couleurs, des pommes et des poires, ou encore des voitures et des camions relèvent de scénarios de collections existant en parallèle et pouvant être regroupées dans des collections englobantes comme les billes ou les fruits ou encore les véhicules, ce qui évoque une addition ou une soustraction. En revanche, des fleurs et des vases, des œufs et des boîtes, des billes et des sacs ou des pommes et des paniers relèvent de scénarios de répartition de contenus dans des contenants, ce qui évoque une multiplication ou une division.

62 — Ce problème relève *a priori* du niveau sixième ; il nécessite un changement d'unité pour que l'opération à effectuer soit accessible à un élève de cours moyen.

Lorsque les opérations évoquées par les éléments en jeu ne sont pas celles qui mènent à la solution, cela conduira à une difficulté accrue de la résolution des problèmes[63]. Par exemple, un problème avec un nombre de vases et de fleurs pour lequel il faut effectuer une soustraction et non pas une division.

Scénarios facilitateurs	Scénarios non facilitateurs
« Léo a 21 billes rouges et 7 billes bleues. Combien Léo a-t-il de billes rouges de plus que de billes bleues ? »	*« Léo a 21 roses et 7 vases. Combien Léo a-t-il de roses de plus que de vases ? »*
« Lucie a 13 vases. Elle met 7 roses dans chaque vase. Combien de roses y aura-t-il dans l'ensemble des vases ? »	*« Lucie a 7 billes rouges. Elle reçoit 13 billes bleues en échange de chaque bille rouge. Combien de billes bleues aura-t-elle à la fin des échanges ? »*

Dans le cadre de l'enseignement de la résolution de problèmes, il est essentiel d'envisager des cas de figure où les scénarios ne sont pas facilitateurs afin de s'assurer que les élèves ont acquis une autonomie suffisante pour résoudre les problèmes y compris en l'absence de ces soutiens sémantiques.

Le champ numérique

Les nombres en jeu dans un problème peuvent être source de difficulté pour les élèves. La difficulté va être liée à la nature ou l'écriture des nombres (fractions, écriture à virgule d'un nombre décimal), au nombre de chiffres que comporte l'écriture de ces nombres ou encore au fait que ces nombres sont des mesures données dans des unités différentes. Dans les problèmes multiplicatifs, les rapports qu'entretiennent entre eux les nombres peuvent également être ou non source de difficulté.

La complexité engendrée par les nombres en jeu et leurs relations peut apparaître :

— lors des phases de compréhension et de modélisation du problème en créant une surcharge cognitive qui laisse alors moins de disponibilité pour appréhender les autres difficultés du problème ;
— lors de la phase de calcul en nécessitant d'éventuels changements d'écriture des nombres (passage d'une écriture fractionnaire à une écriture décimale par exemple) ou d'éventuels changements d'unités des grandeurs et des stratégies de calcul parfois mal maîtrisées à ce stade de la scolarité.

63 — Miriam Bassok, Valerie Chase, Shirley Martin, "Adding Apples and Oranges: Alignment of Semantic and Formal Knowledge", *Cognitive Psychology*, n° 35, 1998.

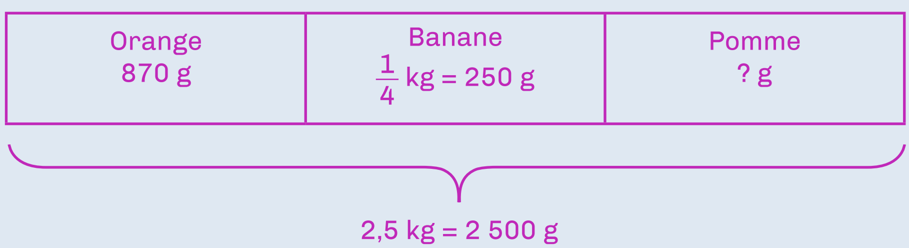
Au cours moyen, un problème avec des nombres entiers inférieurs à 20 pourra souvent être traité mentalement, alors que le même problème avec des nombres nouvellement rencontrés nécessitera un traitement à l'écrit. Il est à noter que la surcharge cognitive que représente le maniement de ces nouveaux nombres peut conduire à la nécessité de produire un schéma pour modéliser le problème alors que la modélisation de ce même problème ne nécessite pas de schéma avec des nombres avec lesquels l'élève est plus à l'aise.

Le problème ci-dessous, qui peut être traité par un élève de CP, pourra être traité mentalement, sans difficulté, par un élève de cours moyen.

> « *Tiago a acheté 10 kg de fruits. Il a acheté 2 kg d'oranges, 3 kg de bananes et des pommes. Quelle masse de pommes a-t-il achetée ?* »

A contrario, le problème ci-après, identique au précédent aux valeurs numériques près, nécessitera sans doute un traitement à l'écrit, généralement avec un schéma pour représenter la situation et écrire les différentes masses sous une forme homogène avant de se lancer dans des calculs.

> « *Tiago a acheté 2,5 kg de fruits. Il a acheté 870 g d'oranges, un quart de kilogramme de bananes et des pommes. Quelle masse de pommes a-t-il achetée ?* »



Dans ce problème, la difficulté est augmentée par le fait que les masses sont données dans des unités différentes (gramme et kilogramme) et par le fait que les mesures de ces masses sont fournies avec des nombres avec des écritures différentes (entier, fraction, écriture à virgule d'un nombre décimal).

Dans d'autres problèmes, ce sont les calculs qui doivent être effectués qui peuvent engendrer des difficultés, car les techniques opératoires sont apprises depuis peu de temps.

> « *J'achète 24 tickets d'entrée à un parc de loisirs. Le prix total est de 300 €. Quel est le prix d'un ticket ?* »

Ce problème de recherche de la valeur d'une part est très simple du point de vue de sa structure et de la forme de l'énoncé. Un simple changement des données permet d'obtenir un problème qui serait massivement réussi par des élèves de cours élémentaire.

> « *J'achète 4 tickets d'entrée à un parc de loisirs. Le prix total est de 40 €. Quel est le prix d'un ticket ?* »

Le problème avec 24 tickets nécessite, lui, de calculer le quotient 300 ÷ 24, opération difficile à traiter mentalement au cours moyen, et qui peut donc conduire à poser une division décimale. Une recherche par essais et ajustements du nombre qui, multiplié par 24, donne 300 est également possible. L'algorithme de la division décimale est introduit au CM2 et peut donc être encore mal maîtrisé. Lors d'une évaluation nationale des élèves de CM2 de janvier 2011, le taux de réussite à cet exercice était de 26 % seulement.

Dans d'autres cas, les calculs auxquels conduit une première modélisation peuvent ne pas être accessibles aux élèves. Il est alors nécessaire de développer des stratégies de calcul spécifiques ou de repenser la modélisation.

> « *Un pack de six bouteilles de lait entier biologique coûte 7,38 €. Quel est le prix d'une bouteille de ce pack ?* »

Pour ce problème qui s'adresse à des élèves de CM2, l'opération qui permet de résoudre directement le problème est la division décimale 7,38 ÷ 6. Cette opération est difficile à effectuer sans poser l'opération. La division décimale posée est une opération nouvelle au CM2 et reste difficile pour certains élèves. En travaillant avec des centimes, la division peut être ramenée à une division euclidienne, qui reste elle aussi difficile pour certains élèves mais qui est sans doute plus accessible car introduite dès le CM1.

— « *Pour son anniversaire, Lyna a acheté 3 litres de jus de fruits. Les verres de Lyna contiennent 0,2 litre.*
Combien de verres de jus de fruits Lyna pourra-t-elle servir ? »

— « *Un mètre d'un certain tissu coûte 5,40 €. Hugo souhaite acheter 2,5 mètres de ce tissu.*
Combien devra payer Hugo pour cet achat ? »

Pour ces deux problèmes, une première modélisation peut conduire aux calculs suivants : 3 ÷ 0,2 et 5,40 x 2,5. Les opérations posées correspondant à ces deux calculs ne sont pas accessibles à des élèves de cours moyen. Les calculs nécessitent donc une réflexion supplémentaire pour pouvoir trouver respectivement le quotient et le produit cherchés. Plusieurs stratégies peuvent être déployées, en voici quelques exemples :

— **Un changement d'unité de mesure pour le premier problème**

Les élèves peuvent choisir de travailler avec des centilitres (ou des millilitres).
3 L = 3 x 1 L = 3 x 100 cL = 300 cL et 0,2 L = 0,2 x 1 L = 0,2 x 100 cL = 20 cL. On cherche donc combien de verres de 20 cL on peut remplir avec 300 cL de jus de fruits.
300 cL ÷ 20 cL = 15. Avec 3 L de jus de fruits, Lyna peut donc servir 15 verres.

— **Une utilisation de la proportionnalité pour le premier problème**

5 x 0,2 = 5 x 2 dixièmes = 10 dixièmes = 1. D'où 5 x 0,2 L = 1 L.
5 verres contiennent 1 L. Avec 1 L, Lyna peut donc servir 5 verres.
3 L, c'est 3 fois plus que 1 L ; avec 3 L on remplit donc 3 fois plus de verres qu'avec 1 L.
3 x 5 verres = 15 verres ; avec 3 L, Lyna peut donc servir 15 verres.

— Une utilisation de la proportionnalité pour le second problème

Un mètre de tissu coûte 5,40 €, donc deux mètres de tissu coûtent deux fois plus, c'est-à-dire 2 x 5,40 € = 10,80 €.
Un mètre de tissu coûte 5,40 €, donc un demi-mètre de tissu coûte la moitié de 5,40 €, c'est-à-dire 5,40 € ÷ 2 = 2,70 €.
2,5 m = 2 m + 0,5 m ; 2,5 mètres de tissu coûtent donc le prix de 2 mètres de tissu plus le prix d'un demi-mètre de tissu, c'est-à-dire 10,80 € + 2,70 € = 13,50 €.

En résumé

- Trois sources principales de difficultés sont à retenir :

  — **la structure du problème.** Les problèmes en une étape sont d'une difficulté très hétérogène (voir chapitre 1). Les problèmes en plusieurs étapes, qui sont l'objectif principal de l'enseignement de la résolution de problèmes au cours moyen, sont en général plus difficiles que ceux en une étape. Les problèmes atypiques sont les moins connus des élèves et généralement les plus difficiles à résoudre ;

  — **le texte de l'énoncé du problème.** Un énoncé de quelques lignes, éventuellement accompagné d'une illustration, peut poser de multiples difficultés de compréhension liées au contexte de l'énoncé, au lexique utilisé, aux représentations que se font les élèves en lisant l'énoncé, etc. ;

  — **les nombres en jeu.** Au cours moyen, les élèves rencontrent de nouveaux nombres (grands nombres, fractions, nombres décimaux) avec lesquels ils apprennent à calculer. Leur présence et des écritures de natures différentes dans les problèmes peuvent être sources de difficultés pour de nombreux élèves.

- Pour construire des séquences et des séances d'enseignement de la résolution de problèmes, le professeur prend en compte ces trois sources de difficultés pour organiser :

  — la progressivité des apprentissages des élèves ;

  — la différenciation des tâches proposées ;

  — l'accompagnement des élèves en difficulté.

Comment délivrer un enseignement structuré de la résolution de problèmes ?

Construire un enseignement de la résolution de problèmes est complexe, car il faut mener de front des actions dans deux directions qui peuvent sembler difficiles à concilier :

— faire acquérir aux élèves des **stratégies efficaces** de résolution de problèmes, adaptées à des formes de problèmes bien identifiées rencontrées au cours moyen, et des **quasi-automatismes** permettant de mobiliser aisément et à bon escient ces stratégies en s'appuyant sur la mémoire des problèmes résolus précédemment ;

— apprendre aux élèves à **ne pas être déstabilisés par des problèmes nouveaux**, non rencontrés précédemment, et développer chez eux des **habilités** en résolution de problèmes : il s'agit de leur permettre d'aborder ces problèmes nouveaux en ayant confiance en leur aptitude à les résoudre, en inhibant certains réflexes inadaptés qui les conduiraient à une réponse erronée et en apprenant à tirer parti de l'ensemble des problèmes résolus antérieurement.

Fixer collectivement des objectifs sur le champ de la résolution de problèmes

Travailler en cohérence en équipe au sein d'une école est essentiel pour accompagner efficacement les apprentissages relatifs à la résolution de problèmes. Les professeurs de cours moyen d'une école doivent non seulement travailler collectivement pour permettre à l'ensemble des élèves de l'école d'atteindre des objectifs clairement définis, mais ils doivent également travailler en cohérence avec leurs collègues de cycle 2 ayant les élèves en amont, et avec les professeurs de mathématiques qui accueilleront les élèves en sixième. Ces échanges doivent permettre :

— de prendre en compte ce qui a été fait précédemment et donc de s'appuyer sur ce qui a été appris au cycle 2 ;
— d'avoir une vision claire de ce qui est attendu ultérieurement pour mieux préparer les élèves à la classe de sixième et informer les professeurs de collège du travail mené à l'école élémentaire.

Ces échanges peuvent être l'occasion de mieux harmoniser les outils utilisés et les stratégies enseignées tout au long de la scolarité et donc de rendre l'enseignement plus efficace en permettant aux professeurs de s'appuyer sur ce qui a été fait l'année précédente. Dans le cadre de la liaison école-collège, les échanges peuvent être menés avec l'ensemble des collèges de chaque secteur, en harmonisant ce qui peut l'être (outils, stratégies, objectifs, etc.) dans les différentes écoles partenaires afin de permettre aux professeurs de collège de s'appuyer fortement, à l'entrée en sixième, sur ce qui a été appris à l'école depuis la maternelle.

Ces échanges peuvent s'appuyer sur les différents chapitres de ce guide qui fournissent une liste non exhaustive de points sur lesquels une équipe peut se mettre d'accord.

— **Quels problèmes ?** Savoir quels types de problèmes (voir chapitre 1) ont été résolus et même avoir des exemples très précis de problèmes résolus l'année précédente par les élèves peut permettre de s'appuyer sur ceux-ci dès le début de l'année scolaire, pour éviter de proposer trop de problèmes d'un niveau équivalent, voire inférieur, à ce qui a été vu l'année précédente, ou encore des problèmes beaucoup plus difficiles pour lesquels les élèves n'ont pas encore développé d'habiletés suffisantes. Cela peut aussi permettre de partir de ces problèmes pour en proposer d'un peu plus difficiles, en s'appuyant sur les différents facteurs pouvant générer des difficultés mis en avant dans le chapitre 3. Il faut différencier clairement, au fur et à mesure du cycle, les problèmes que l'on commence à fréquenter et les problèmes dont on considère que la résolution est exigible. Retarder l'introduction de problèmes difficiles conduit à donner moins de temps aux élèves fragiles pour apprendre à les résoudre et peut donc contribuer à créer de la difficulté.
— **Quelles stratégies ?** Les différentes phases proposées dans le chapitre 2 peuvent servir de base pour partager ce qui a été mené à un moment donné de la scolarité : compétences développées en calcul, réflexion sur la compréhension et le lexique mathématique introduit, travail sur la modélisation en s'appuyant sur des schémas (voir la partie « Enseigner explicitement des méthodes de représentation efficaces pour modéliser » de ce chapitre 4), etc.

— **Quels niveaux de maîtrise ?** Les obstacles présentés au chapitre 3, liés à la structure mathématique du problème, à la nature et la forme de l'énoncé et aux données numériques en jeu, fournissent des curseurs pour déterminer le niveau de difficulté d'un problème. Ces curseurs doivent permettre de se mettre d'accord sur le niveau de difficulté auquel les élèves doivent pouvoir faire face à un moment donné de la scolarité. Les évaluations nationales de sixième qui comportent une évaluation sur la résolution de problèmes contribuent également à nourrir ces échanges.

Construire une progression partagée

Les échanges en équipe doivent permettre d'établir une progression partagée. Les différents chapitres de ce guide montrent toute la complexité qu'il y a à rendre explicite cette progression tant la difficulté d'un problème est multifactorielle. Ce n'est pas parce qu'un problème est additif et en une étape qu'il est simple ; d'ailleurs de nouveaux problèmes additifs et en une étape seront rencontrés tout au long du cycle 3. En outre, certains problèmes en plusieurs étapes sont simples à résoudre pour les élèves.

Dans un premier temps, pour rendre les choses simples, le choix peut être fait de partager une progression **par année ou par demi-année**, idéalement **du début du cycle 2 à la fin du cycle 3**, indiquant :

— une liste d'exemples de problèmes en une ou plusieurs étapes que les élèves doivent savoir traiter, s'appuyant sur les repères fournis dans le chapitre 1 ;
— des objectifs précis concernant les problèmes atypiques que les élèves doivent apprendre à résoudre, s'appuyant sur les repères fournis dans le chapitre 1 ;
— des éléments sur ce qui est attendu des élèves concernant la compétence « représenter » (construction de schémas).

Des outils plus précis et plus complets peuvent être produits ensuite, en fonction du temps dont disposent les équipes pour les construire. Il peut, par exemple, être proposé une évaluation en résolution de problèmes, pour la période 3 de CM2, partagée par l'ensemble des écoles d'un même réseau.

Focus | Un exemple d'évaluation commune proposée en fin de période 3 en CM1

Modalité : Évaluation à l'écrit de 40 minutes. Les énoncés des problèmes sont distribués sur une feuille au format A5 qui ne sera pas collée afin que les élèves puissent toujours avoir les énoncés sous les yeux. Les élèves résolvent les problèmes sur une feuille de classeur. Les élèves travaillent individuellement. La calculatrice n'est pas autorisée.

Objectifs : Faire le point sur ce qui a été travaillé au cours des périodes 2 et 3 :

- problèmes en une étape sans difficulté particulière portant sur les entiers (nombres supérieurs à 10 000), les fractions et les nombres décimaux avec appui possible sur un schéma en barres ou une ligne numérique ;
- problèmes en plusieurs étapes à l'énoncé épuré (contexte familier ou facile à se représenter, phrases simples et courtes, pas de données inutiles, etc.) faisant intervenir des nombres décimaux ;
- problèmes en plusieurs étapes faisant intervenir des nombres entiers inférieurs à 1 000.

Problèmes de l'évaluation :

- **Problème 1** : « *En 2021, la population française était de 67 700 000 habitants et la région Île-de-France comptait 12 300 000 habitants.*
  Combien de personnes vivant en France habitaient en dehors de la région Île-de-France en 2021 ? »

- **Problème 2** : « *Margaux a ramassé 1,7 kg de fraises et Pablo en a ramassé 1,3 kg.*
  Quelle masse de fraises ont-ils ramassée à eux deux ? »

- **Problème 3** : « *Margaux a ramassé 1,7 kg de fraises et Pablo en a ramassé 1,3 kg de plus que Margaux.*
  Quelle masse de fraises ont-ils ramassée à eux deux ? »

- **Problème 4** : « *Wassim a économisé 20 €. Il veut utiliser les* $\frac{3}{10}$ *de cet argent pour acheter un manga.*
  Combien coûte le manga ? »

- **Problème 5** : « *Clara a acheté 7 crayons coûtant chacun 2 € et 3 mangas. Les 3 mangas sont tous au même prix. Elle a donné 50 € au caissier qui lui a rendu 15 €.*
  Quel est le prix d'un manga ? »

- **Problème bonus** : « *Le nombre de billes de Robin est égal au quart du nombre de billes de sa sœur Aya. À eux deux, Robin et Aya ont 40 billes.*
  Combien de billes ont chacun des enfants ? »

Le sixième problème ne fait pas véritablement partie de l'évaluation, c'est un problème présenté comme « supplémentaire » pour les élèves ayant terminé avant la fin du temps imparti.

Pour la correction, le professeur complète le tableau suivant avec les informations (R : réussi, PR : partiellement réussi, NR : non réussi, NT : non traité). Ceci peut éventuellement être complété d'informations plus précises, par exemple sur la présence d'un schéma pertinent ou non, sur des indices d'une modélisation, sur des éléments de réussite partielle, etc. Le focus du chapitre 2, « Analyser les erreurs des élèves pour adapter l'aide à leur apporter », donne des exemples d'analyse de productions écrites des élèves.

		Élève 1	**Élève 2**	**Élève 3**	**....**			**Bilan**
Problème 1	Compréhension et modélisation							
	Calculs							
	Réponse							
Problème 2	Compréhension et modélisation							
	Calculs							
	Réponse							
...								
Bilan								

Pour sa propre synthèse, il compte le nombre de R dans chaque ligne du tableau pour l'ensemble des élèves de la classe pour repérer les types de problèmes et les étapes pour lesquels un travail renforcé devra être mené lors de la période 4.

Pour les exercices et étapes massivement réussis, il repère les élèves qui ne les ont pas réussis pour travailler spécifiquement avec eux sur ces points particuliers. Cela est essentiel. En effet, trop souvent, l'attention est uniquement portée sur les tâches les plus échouées de façon globale, alors que la centration doit être prioritairement portée sur les élèves ayant échoué aux tâches les mieux réussies par l'ensemble de la classe.

Points de vigilance et propositions pour construire une séquence en résolution de problèmes

Comme pour toute autre séquence d'enseignement en mathématiques, la construction d'une séquence d'enseignement en résolution de problèmes s'appuie sur des objectifs clairement définis. « La résolution de problèmes » n'est pas un objectif en soi, mais le champ sur lequel le travail est mené. L'objectif d'une telle séquence doit donc être plus précis, par exemple « savoir résoudre des problèmes en une étape avec des fractions » ou « savoir résoudre des problèmes multiplicatifs de comparaison en une étape avec des nombres décimaux » ou encore « savoir résoudre des problèmes algébriques en utilisant des schémas en barres ». Une séquence peut aussi avoir plusieurs objectifs, mais il est préférable de les hiérarchiser afin de ne pas perdre de vue l'intention première.

Rendre visibles les objectifs de la séquence dès la première séance

Une séquence peut commencer par la proposition d'un premier problème à résoudre rapidement sur l'ardoise ou le cahier de brouillon, afin de faire émerger explicitement ce qui pose problème (et qui devrait ne plus en poser en fin de séquence), ainsi que des moyens que peuvent utiliser les élèves pour faire face à ce qui pose problème. L'utilisation de l'ardoise véhicule un message clair sur le fait que l'on est en train d'essayer, de chercher, de faire émerger un savoir nouveau. Les éventuelles erreurs sont donc accueillies avec une bienveillance renforcée. Ce premier problème permet de rendre les élèves réceptifs aux solutions qui seront proposées ensuite pour surmonter les difficultés que présente le problème.

Par exemple, pour une séquence ayant pour objet de travailler sur des problèmes en plusieurs étapes avec des comparaisons additives en s'appuyant sur le schéma en barres correspondant, le professeur peut proposer le problème suivant à résoudre sur l'ardoise.

> « *Amir, Naël et Jeanne ont ramassé des fraises dans leur jardin. Amir en a ramassé 3,4 kg et Naël 1,5 kg. Ensemble, les deux frères en ont ramassé 2,6 kg de plus que leur sœur.*
> *Quelle masse de fraises Jeanne a-t-elle ramassée ?* »

Ce problème permettra de réintroduire le schéma correspondant aux comparaisons additives lors du temps de mise en commun qui suivra le travail de recherche sur l'ardoise. D'autres moyens sont bien évidemment envisageables pour faire émerger ce qui pose des difficultés et les aides proposées pour les surmonter.

Une fois que l'enseignant a explicité les connaissances ou savoir-faire utiles, les élèves doivent pouvoir les mettre en œuvre dans de nouveaux problèmes, l'utilisation d'un cahier étant cette fois indispensable pour laisser des traces pour l'enseignant et pour l'élève. Ces problèmes peuvent être très proches du problème initial dans un premier temps, mais il est important de ne pas se contenter de poser des problèmes d'entraînement dont le contexte est similaire à celui du problème initial : il faut aussi proposer des problèmes portant sur un contexte suffisamment éloigné du contexte initial. En effet, les travaux sur le transfert d'apprentissage montrent que des élèves peuvent avoir tendance à se centrer sur des éléments de surface pour relier les problèmes entre eux (problèmes d'achats, problèmes de gains, problèmes sur les fruits, etc.), alors que les élèves en réussite s'appuient sur la structure mathématique sous-jacente[64]. Il est donc important de mettre en avant les liens de structure qui unissent des problèmes dont l'habillage peut laisser penser *a priori* qu'ils sont éloignés afin d'inviter les élèves, et en particulier les plus fragiles, à se focaliser sur les liens de structure mathématique.

Laisser les élèves résoudre des problèmes tout en les accompagnant

Lors des temps d'enseignement consacrés à la résolution de problèmes, la priorité doit être donnée à la résolution de problèmes par les élèves[65]. Une centration sur des sous-objectifs plus précis (compréhension, construction de schémas, modélisation, calculs, etc.) ne doit pas être proposée *a priori*, même si les professeurs l'ont nécessairement à l'esprit lorsqu'ils circulent dans les rangs. Elle ne devient utile que pendant la résolution, avec les élèves pour lesquels des besoins spécifiques émergent, ou après la résolution, lors d'un temps de mise en commun, d'échange ou de correction. De nouveaux problèmes peuvent être proposés ensuite pour renforcer les sous-objectifs visés.

Cette remarque fondamentale sur la priorité donnée à l'action de résolution de problèmes des élèves et à l'explicitation des objectifs par le professeur doit conduire à éviter certaines dérives parfois observées dans les classes. Des recommandations sont apportées dans la suite de cette partie. Il est bien évidemment impossible de faire des propositions valables dans toutes les situations, et celles qui suivent sont donc des propositions générales, qui peuvent ne pas être adaptées à certaines séances ou certains contextes particuliers ; l'analyse fine des besoins des élèves par le professeur doit permettre les aménagements utiles.

64 — Edward Silver, “Student Perceptions of Relatedness among Mathematical Verbal Problems”, *Journal for Research in Mathematics Education*, n° 10, 1979.

65 — Catherine Houdement, « Problèmes arithmétiques basiques : le cœur du problème », Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM, 2018.

LIMITER LES ÉCHANGES SUR LE PROBLÈME EN AMONT DE SA RÉSOLUTION

Les échanges que l'on peut observer sont de différentes natures : il s'agit parfois d'expliciter ou de faire expliciter la signification de certains mots de l'énoncé, d'autres fois d'amorcer la résolution du problème. Ces deux pratiques sont généralement à éviter. La première a tendance à éloigner les élèves de la tâche de résolution (Est-ce un exercice sur le lexique ?) et conduit souvent à une déconcentration des élèves, en particulier quand les explications ou les échanges sur le lexique s'éternisent. La seconde conduit souvent à « tuer » le problème : en effet, le professeur ne maîtrise pas les réponses aux questions des élèves, qui donnent souvent plus d'informations que ce qui serait souhaitable. Les élèves ne sont alors plus dans une tâche de résolution de problème, mais dans une simple tâche d'exécution. Le plaisir de faire des mathématiques, le plaisir de chercher et trouver la solution du problème est ainsi fortement réduit. Ce démarrage rapide de l'action de résolution par les élèves libère le professeur qui peut ainsi se consacrer pleinement à l'accompagnement des élèves en action, en prodiguant à chacun les encouragements, les conseils ou les coups de pouce utiles pour progresser. Bien évidemment, cette remarque ne concerne pas la lecture du problème à voix haute par le professeur ou un pair, à un ou plusieurs élèves qui seraient en difficulté pour effectuer cette lecture eux-mêmes.

ÉVITER LES SÉANCES DE RÉSOLUTIONS DE PROBLÈMES CENTRÉES SUR DES SOUS-TÂCHES

Il est en effet préférable d'éviter les séances de résolution de problèmes qui ne conduisent pas à résoudre des problèmes. Par exemple, des séances qui consistent à repérer les données utiles et les données inutiles d'une série de problèmes, ou encore des séances qui consistent seulement à effectuer des représentations (dessins, schémas) des problèmes sans chercher à les résoudre. De telles séances risquent de conduire à développer des routines de résolution indésirables qu'il est parfois nécessaire d'inhiber pour certains problèmes. Les quasi-automatismes que l'on cherche à développer en résolution de problèmes ne peuvent pas être déconnectés des problèmes dans lesquels ils sont activés, sauf sans doute les automatismes de calcul mis en œuvre pendant la phase calculatoire de la résolution pour laquelle le contexte du problème n'importe pas. Il est par contre essentiel de rendre explicites ces sous-tâches lors des temps de mise en commun, car une prise de conscience de ces sous-tâches et une efficacité à les traiter sont nécessaires pour être en réussite en résolution de problèmes.

ÉVITER D'ÊTRE SURMOBILISÉ PAR LES ÉLÈVES LES PLUS EN RÉUSSITE

Quand la priorité est donnée à la résolution de problèmes par les élèves, des difficultés à traiter le problème ou un simple besoin d'être rassuré apparaissent, entraînant généralement une mobilisation très forte du professeur par les élèves. Si, dans quelques cas, il est assis à son bureau tandis que les élèves se déplacent pour présenter leur travail, dans la majorité des cas, et à raison, le professeur préfère se déplacer lui-même dans les rangs, les élèves restant assis à leur place. Souvent les élèves signalent leur besoin d'accompagnement en levant la main, le professeur tente alors, autant qu'il le peut, de répondre aux sollicitations des élèves. Dans certaines classes, et c'est sans doute une pratique pertinente, les élèves ne lèvent plus la main (c'est une demande explicite du professeur) et le professeur circule de manière ordonnée dans les rangs. Cette dernière pratique lui permet en effet de ne pas centrer son attention sur les élèves qui sont les plus demandeurs, ceux qui ont le plus d'appétence pour les mathématiques et qui sont souvent le plus en réussite, mais au contraire de consulter les travaux de tous les élèves et de consacrer plus de temps aux élèves qui ont le plus de besoins. Il peut ainsi valider les bonnes réponses, encourager les réussites et fournir l'accompagnement approprié à ceux qui ont besoin d'aide, individuellement ou au sein d'un groupe de besoin. Une telle action permet également de gagner en efficacité lors des temps de mise en commun, en évitant de corriger collectivement et de s'attarder sur un problème dont la résolution ne pose pas de difficulté aux élèves.

ÉVITER LES PRISES DE PAROLE TROP FRÉQUENTES SUR LES TEMPS DÉDIÉS À LA RÉSOLUTION INDIVIDUELLE

Il est souvent difficile pour le professeur, pendant les temps de recherche, de laisser les élèves chercher sans intervenir collectivement. En effet, des constats de difficultés, lors du passage dans les rangs, peuvent encourager à communiquer des informations supplémentaires aux élèves. Cela peut être pertinent si une incompréhension d'un élément du problème est largement partagée. Il peut même être pertinent d'interrompre le temps de recherche pour une rapide mise au point. Cependant, ces interruptions doivent rester peu fréquentes afin de laisser véritablement du temps aux élèves pour effectuer la tâche de résolution qui leur est confiée. Dans la plupart des cas, une information transmise aux seuls élèves qui en ont besoin sera l'action la plus pertinente.

ÉVITER LES TEMPS DE MISE EN COMMUN TROP LONGS

Idéalement, au moins les trois quarts de la durée d'une séance de résolution de problèmes doivent être consacrés à la résolution de problèmes par les élèves. Cela signifie que le temps de mise en commun ne doit pas dépasser le tiers du temps consacré à la résolution individuelle. Ce ratio ne sera bien évidemment pas nécessairement respecté quand un temps long d'institutionnalisation est prévu, notamment avec l'écriture d'éléments dans le cahier de leçons. Ce ratio implique également que tous les élèves soient effectivement en recherche pendant tout le temps consacré à la résolution individuelle. Ceci implique que les élèves les plus fragiles soient activement soutenus et accompagnés pour ne pas décrocher et pour rester actifs pendant tout le temps de la séance, mais aussi que les élèves ayant le plus de facilités en mathématiques se voient proposer autant de nouveaux problèmes que nécessaire pour pouvoir faire des mathématiques pendant toute la séance. La consultation des cahiers, au fil de la séance, est essentielle pour organiser le temps de mise en commun. Il est inutile de corriger collectivement un problème qui n'a posé de difficulté à personne et il est également inutile de corriger collectivement un problème qui n'a pu être abordé que par deux ou trois élèves, une correction dans le cahier par le professeur sera alors certainement plus pertinente.

Ces temps de correction et de mise en commun doivent être l'occasion de mettre en avant les éléments que les élèves doivent s'approprier et retenir. Il s'agit d'une tâche particulièrement délicate pour le professeur qui doit faire percevoir que toutes les méthodes ne se valent pas, que certaines sont moins efficaces et doivent être abandonnées alors que d'autres doivent au contraire être privilégiées. On pense ici à l'usage de représentations très coûteuses en temps et non pertinentes, car susceptibles de générer des erreurs de comptage[66]. Dans le même temps, le professeur doit pouvoir montrer qu'il existe parfois plusieurs façons de résoudre un même problème. Par exemple, pour la résolution de problèmes à plusieurs étapes, différents enchaînements d'étapes peuvent être choisis. On peut le voir pour le problème des fruits proposé au chapitre 2.

> « *Marius revient du marché. Il a acheté 750 g de fraises, un demi-kilogramme d'abricots et a oublié la masse des kiwis achetés. Le contenu de son panier pèse 1,650 kg.*
> *Quelle est la masse des kiwis ?* »

On peut d'abord calculer la masse des fraises et des abricots, puis retirer cette masse à la masse totale (on résout alors le problème en faisant une addition puis une soustraction) ; on peut aussi commencer par retirer la masse des fraises à la masse totale, puis retirer la masse des abricots à la masse obtenue (on résout alors le problème en faisant deux soustractions).

Si aucun élève n'a utilisé la méthode de résolution que le professeur souhaitait mettre en avant, l'objectif d'apprentissage ne doit pas être abandonné, bien au contraire, car il sera vraisemblablement utile. Le professeur introduira cette nouvelle méthode en annonçant aux élèves qu'il va leur enseigner une méthode plus efficace pour réussir les problèmes qui ressemblent au problème proposé. Il pourra la présenter comme un traitement proposé par un élève l'année précédente et inviter les élèves à dire ce qu'ils pensent de la méthode. Le fait de la présenter comme une méthode d'élève permet de rendre les élèves plus critiques et donc plus attentifs à son égard, ce qui contribue à les conduire à en saisir l'intérêt. À l'issue d'une telle présentation, l'enseignant peut proposer un nouveau problème en imposant l'utilisation de la procédure présentée pour sa résolution afin de permettre aux élèves d'en saisir l'intérêt.

Développer des quasi-automatismes féconds tout en apprenant à inhiber ceux qui sont contre-productifs

L'enseignement de la résolution de problèmes doit contribuer à développer chez les élèves de façon simultanée des quasi-automatismes leur permettant d'être plus efficaces et plus autonomes lors de la résolution de problèmes, ainsi qu'une aptitude à inhiber des procédures inappropriées qui peuvent les conduire à une réponse erronée. Ceci représente une difficulté majeure pour la mise en œuvre de l'enseignement, avec deux attentes qui peuvent sembler contradictoires.

Exemple :

> « *Théa a 7,30 €. Théa a 2,50 € de plus que Léandre.*
> *Combien d'argent a Léandre ?* »

66 — Pascale Masselot, « Différenciation à l'école primaire et au début du collège : un point de vue de didacticienne des mathématiques », propos recueillis par Richard Cabassut, Opinions, Site Apmep, 2018.

Pour le problème ci-dessus, l'élève doit pouvoir dire immédiatement, de façon quasi automatisée, qu'il s'agit d'un problème de comparaison (additive). Dans le même temps, l'élève doit pouvoir inhiber la réponse très tentante consistant à réaliser une addition. En effet, le mot « plus » peut faire penser à une addition, et l'addition « 7,30 € + 2,50 € », beaucoup plus facile à effectuer que la soustraction « 7,30 € – 2,50 € », est naturellement très tentante… En fait, le mot « plus » correspond bien à une addition, mais il s'agit d'une addition à trou « 7,30 € = ? + 2,50 € » dont le terme manquant se trouve en effectuant une soustraction ou en complétant l'égalité par un autre procédé.

Il est important, lors de la résolution de problèmes de comparaison, d'amener les élèves à se demander systématiquement qui en a le plus ; question qui est essentielle et apparaît naturellement lorsque l'on amorce la construction d'un schéma.

Une façon d'entraîner à cette inhibition est de demander régulièrement de justifier les opérations envisagées, y compris quand elles conduisent à un modèle correct. Par exemple, au problème précédent, un élève qui répond 4,80 € en expliquant qu'il a fait la soustraction « 7,30 – 2,50 » doit pouvoir justifier son choix de la soustraction. Bien entendu, il ne faut pas poser systématiquement la question lors de l'énoncé d'un automatisme correct, mais il est important, pour les élèves qui utilisent des automatismes incorrects, de comprendre que les automatismes corrects sont justifiables.

Olivier Houdé[67] a largement illustré le rôle essentiel du cortex préfrontal pour inhiber les solutions impulsives et l'importance de développer un système d'inhibition jouant un rôle d'arbitrage entre une pensée « automatique et intuitive » et une pensée « réfléchie logico-mathématique », moins rapide, mais plus fiable.

Pour l'enseignement de la résolution de problèmes, cela engage à proposer régulièrement aux élèves des problèmes variés pouvant, pour certains, contenir des mots inducteurs ou une forme inductrice auxquels les élèves vont devoir résister pour produire une réponse correcte. Il peut s'agir de mots inducteurs comme dans le problème précédent ou le suivant.

> « *Valentine a 51 billes. Valentine a 3 fois plus de billes que Sohan.*
> *Combien de billes a Sohan ?* »

Il peut s'agir aussi d'actions : « gagner », « recevoir », « ajouter », « grandir » qui sont généralement associées à des additions, alors que « perdre », « retirer », « enlever », « diminuer » sont associées à des soustractions. Comme nous l'avons vu précédemment, il peut s'agir d'additions ou de soustractions à trou et l'opération à mobiliser avec les deux nombres de l'énoncé n'est alors pas celle qui vient spontanément à l'esprit. Rencontrer des problèmes heurtant ces associations, comme les deux problèmes ci-dessous, permet d'entraîner les élèves à inhiber des réflexes non pertinents.

— « *Amir a grandi de 7,5 cm en un an. Il mesure aujourd'hui 121 cm.*
Combien mesurait Amir l'année dernière ? »
— « *Zélie a 28,50 € dans sa poche. Elle a perdu 5 € pendant la randonnée effectuée cet après-midi.*
Combien d'argent avait Zélie au début de la randonnée ? »

67 — Olivier Houdé, *Apprendre à résister*, Le Pommier-Humensis, Paris, 2019.

La proportionnalité est un champ particulièrement sensible aux carences d'inhibition, en particulier pour des problèmes qui ne relèvent pas de la proportionnalité mais qui en ont l'apparence.

— Problème 1 : « *Un groupe de 25 musiciens joue un morceau de musique en 75 minutes. Un autre groupe de 50 musiciens va jouer le même morceau de musique. Combien de temps ce groupe mettra-t-il pour jouer le morceau de musique ?* »
— Problème 2 : « *Ellen et Kim courent autour d'un stade. Elles courent à la même vitesse, mais Ellen a commencé à courir après Kim. Quand Kim a parcouru 32 tours, Ellen a parcouru 16 tours. Combien de tours aura parcourus Kim, quand Ellen en aura parcouru 48 ?* »

Ces problèmes ont été proposés à 508 élèves des grades 4 à 6 (trois années du cycle 3 en France) d'écoles flamandes[68]. Les réponses proposées par les élèves sont synthétisées dans le tableau ci-dessous.

	Problème 1	Problème 2
Réponse correcte	8,6 %	51,6 %
Réponse erronée utilisant la proportionnalité	61,7 %	29,3 %
Autre réponse erronée	29,7 %	19 %

On note que près des deux tiers des élèves pour le premier problème et un tiers des élèves pour le second problème n'ont pas réussi à inhiber la réponse tentante fondée sur le recours au modèle proportionnel. Dans cette enquête, il est à noter que pour le second problème les élèves de grade 6 (6e) ont moins souvent donné une réponse correcte et plus souvent utilisé, à tort, la proportionnalité que les élèves de grade 4 (CM1).

Tirer profit des outils numériques

Le numérique peut sembler au premier abord peu utile à l'enseignement de la résolution de problèmes. En effet, la tâche de résolution nécessite le plus souvent l'utilisation de papier et crayon pour s'approprier le modèle, pour construire des schémas qu'il faut souvent modifier ou reprendre, pour noter ses idées, les calculs à effectuer, etc.

Néanmoins, l'utilisation des outils numériques peut s'avérer très intéressante et efficace lors de temps de résolution de problèmes. Nous proposons deux exemples concrets d'utilisation pertinente du numérique lors de séances de résolution de problèmes.

68 — Wim Dooren, Dirk Bock, Marleen Evers, Lieven Verschaffel, "Students' Overuse of Proportionality on Missing-Value Problems: How Numbers May Change Solutions", *Journal for Research in Mathematics Education*, n° 40, 2009.

EXEMPLE 1 : TEMPS DE CORRECTION LORS D'UNE SÉANCE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Le cadre : Une séance consacrée à la résolution de problèmes dans une classe de CM1-CM2.

L'objectif fixé : Renforcer la maîtrise de l'utilisation des schémas en barres pour résoudre des problèmes.

Le travail à mener : Une série de six problèmes à deux étapes est proposée aux élèves. Les problèmes sont de difficulté croissante. Les problèmes ont été choisis pour l'intérêt que présente l'utilisation des schémas en barres pour leur résolution.

Le fonctionnement prévu *a priori* pour la séance : Un temps de trente-cinq minutes de travail individuel est prévu. Pendant ce temps, le professeur souhaite corriger individuellement dans les cahiers les deux premiers problèmes et espère que tous les élèves de la classe les traiteront avec succès sans qu'un temps de mise en commun ne s'avère nécessaire. Pour les deux suivants, il envisage une correction partielle dans les cahiers. Cela se fera pendant la séance en fonction de l'avancée de chacun, avec l'idée que tous auront eu le temps d'y réfléchir. Une correction collective au tableau peut ainsi être envisagée, chacun s'étant engagé. Les deux derniers problèmes s'adressent davantage aux élèves les plus à l'aise. Une troisième modalité de correction peut trouver sa place pour ces problèmes : corriger dans les cahiers hors temps de classe.

Pour la correction collective, le professeur désigne un élève proposant une résolution erronée, mais qui lui semble intéressante, car plusieurs élèves ont fait le même type d'erreur. L'élève place sa production sous le visualiseur, ce qui permet à tous de pouvoir la voir au tableau. Il présente alors ce qu'il a fait aux autres élèves. Cette pratique nécessite bien évidemment une vigilance du professeur afin de ne pas stigmatiser d'élèves, en s'assurant, par exemple, que ce ne sont pas toujours les mêmes élèves qui présentent des procédures correctes et les mêmes élèves qui présentent des procédures erronées. Le professeur doit aussi s'assurer de développer un climat de classe permettant de donner un statut positif à l'erreur, qui doit être vue comme un élément permettant de progresser.

L'intérêt de l'outil numérique est d'éviter un laborieux temps de recopie au tableau et de se centrer sur le travail mené tout en renforçant l'expression orale, en invitant l'élève à présenter son travail, à fournir des arguments pour justifier ses choix, etc. Les autres élèves peuvent alors l'interroger pour demander des explications complémentaires. Une fois l'erreur identifiée et les solutions alternatives proposées, un second élève, ayant traité correctement l'exercice d'une façon modélisante pour les autres élèves, est désigné pour présenter sa solution. Le même processus que pour l'élève précédent est utilisé en s'appuyant sur la production vidéoprojetée à l'aide du visualiseur.

L'outil numérique permet un gain de temps, une meilleure efficacité en donnant à voir précisément aux élèves en difficulté ce qu'ont fait les élèves ayant réussi, un renforcement de la pratique de l'oral par les élèves au sein de la classe, une amélioration de la qualité des écrits des élèves qui savent que leur production est susceptible d'être montrée à la classe, etc.

EXEMPLE 2 : UNE SÉANCE DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES AVEC LE PROCÉDÉ LA MARTINIÈRE

Le cadre : Une séance courte d'une vingtaine de minutes consacrée à la résolution de problèmes dans une classe de CM2.

L'objectif fixé : Renforcer la compréhension et la modélisation de problèmes en une ou deux étapes.

Le travail à mener : Une série de huit problèmes en une ou deux étapes est proposée aux élèves. Les problèmes sont proposés successivement, les élèves doivent répondre sur l'ardoise et lever l'ardoise le moment venu.

Le fonctionnement prévu *a priori* pour la séance : Chaque problème contient les nombres 2, 6 et 20. L'objectif du professeur est de faire réaliser aux élèves l'importance de bien comprendre l'histoire et de repérer ce qui est demandé pour déterminer les calculs à réaliser pour répondre à la question posée. Le professeur a prévu de présenter chaque problème sous forme d'une diapositive d'un diaporama, puis de laisser entre trente secondes et une minute aux élèves pour traiter le problème. Il souhaite à l'issue de ce temps, demander aux élèves d'écrire la réponse sur leur ardoise sous forme d'un nombre seulement, avec l'unité qui convient, et de lever l'ardoise. Il souhaite ensuite mener une régulation entre chaque problème en demandant à un élève en réussite de justifier sa réponse, justification qu'il reprendra en l'améliorant si nécessaire.

Les problèmes proposés sont les suivants.

— *« Elliot achète un ananas à 2 € et une pastèque à 6 €. Il donne un billet de 20 € au vendeur.*
  Combien d'euros le vendeur doit-il rendre à Elliot ? »
— *« Emy achète un crayon à 2 €, un manga à 6 € et une bande dessinée à 20 €.*
  Combien d'euros Emy a-t-elle dépensés ? »
— *« Margot a acheté 2 livres de poche coûtant 6 € chacun et une bande dessinée à 20 €.*
  Combien d'euros Margot a-t-elle dépensés ? »
— *« Nour a acheté des mangas coûtant 6 € chacun. Elle a donné 20 € au vendeur qui lui a rendu 2 €.*
  Combien de mangas Nour a-t-elle achetés ? »
— *« Isaac a acheté une bande dessinée à 20 €. Jeanne a acheté 2 mangas à 6 €.*
  Combien d'euros Isaac a-t-il dépensés de plus que Jeanne ? »
— *« Au supermarché, Ali a donné 2 billets de 20 € à la caissière. La caissière lui a rendu 6 €.*
  Combien d'euros Ali a-t-il dépensés au supermarché ? »
— *« Enzo achète un manga à 6 € et une bande dessinée à 20 €. Il n'a que des pièces de 2 € pour payer.*
  Combien de pièces Enzo doit-il donner au caissier ? »
— *« Dans sa recette de thé à la menthe, Basile met 20 morceaux de sucre. Dans sa recette, Salomé en met 2 fois moins que Basile. Elle en met aussi 6 de moins que Victoire.*
  Combien de morceaux de sucre met Victoire dans sa recette de thé à la menthe ? »

L'outil numérique permet ici de traiter un nombre important de problèmes en un temps très court (un quart d'heure) qui serait impossible à tenir sans la vidéoprojection. Ce traitement de nombreux problèmes avec les mêmes données numériques permet une focalisation renforcée sur la compréhension de l'énoncé (histoire et question) et la modélisation de la situation. La régulation entre chaque problème permet de rendre explicites les stratégies utilisées par certains élèves. La présentation en vidéoprojection avec un temps de résolution limité permet une concentration renforcée des élèves sur la tâche qui leur est proposée.

Différencier pour permettre à tous les élèves de progresser

La différenciation est un geste professionnel à la fois essentiel et complexe dans le contexte d'une classe. Elle l'est tout particulièrement dans le cadre de l'enseignement de la résolution de problèmes[69].

Au sein de la classe, la différenciation peut être envisagée :

— *a priori* : le professeur différencie en amont de la séance, lors de sa préparation, les tâches qui seront confiées aux élèves, en prévoyant des problèmes spécifiques pour certains élèves ou certains groupes d'élèves ; les séances d'APC peuvent également être utilisées dans le cadre de la différenciation en ne les limitant pas à un travail de remédiation, mais en proposant, au contraire, un travail en amont pour permettre de s'assurer que les élèves les plus fragiles disposent effectivement de certaines clés utiles pour la séance collective à venir ;
— **pendant la séance** : lors des temps d'accompagnement des élèves, en donnant des informations particulières, en proposant des questions intermédiaires ou en modifiant le problème que doivent résoudre les élèves.

Dans les deux cas, il faut bien évidemment s'interroger pour savoir si les variations proposées sont :

— **vraiment nécessaires** : l'élève échouera-t-il forcément lors de la résolution du problème sans ces variations ?
— **vraiment utiles** : les variations permettent-elles d'aider l'élève à traiter le problème ?
— **vraiment pertinentes** : ces variations ne nuisent-elles pas au développement des apprentissages visés par le problème initial ?

Nécessaires ?
Le caractère nécessaire de la différenciation proposée mérite tout particulièrement d'être interrogé pour les différenciations proposées *a priori*. Est-on vraiment certain qu'il n'est pas possible de proposer le problème prévu à certains élèves ? Les différenciations *a priori* entérinent, pour l'élève, l'idée que le professeur ne croit pas en son aptitude à résoudre les problèmes proposés au reste de la classe. Elles ne sont donc pas sans conséquence sur l'estime qu'il peut avoir de lui-même et la confiance en son aptitude à progresser. Il est donc préférable d'éviter les différenciations *a priori*, sauf dans les cas où elles constituent une solution

69 — *Ibid*, p. 93, note 66.

d'accessibilité pour des élèves à besoins éducatifs particuliers : élèves en situation de handicap ou élèves atteints de troubles graves des apprentissages pour lesquels la proposition de tâches identiques à celles proposées aux autres élèves pourrait être considérée comme de la malveillance. La suite de ce paragraphe se concentrera donc de façon privilégiée sur une différenciation en cours de séance, pendant les travaux de résolution de problèmes.

Utiles ?
Le caractère utile de la différenciation proposée s'entend de deux façons : d'une part, la différenciation apportée ne doit pas être superflue, c'est-à-dire qu'elle doit être en lien avec la difficulté rencontrée par l'élève, ce qui implique d'avoir identifié précisément cette difficulté ; d'autre part, cette aide ne doit pas être excessive, c'est-à-dire supérieure au besoin de l'élève pour franchir l'obstacle qui lui pose problème, ne lui laissant plus la possibilité d'être confronté à la résolution du problème et donc de progresser. On voit ici la nécessité d'être en mesure d'analyser précisément la résolution proposée par l'élève pour repérer précisément ce qui le met en difficulté (voir chapitre 2, avec la décomposition en quatre phases du processus de la résolution de problèmes).

Pertinentes ?
Le caractère pertinent de la différenciation proposée se mesure à l'aune des objectifs visés par la séance. En effet, il n'est pas possible de juger de la pertinence d'une différenciation sans connaître précisément l'objectif principal de la séance et de la séquence dans laquelle elle s'inscrit. Le chapitre 3 fournit trois curseurs sur lesquels le professeur peut intervenir pour rendre un problème moins difficile, plus accessible :

— **la structure mathématique sous-jacente** : on peut, par exemple, amoindrir la difficulté en réduisant le nombre d'étapes, ou en échangeant avec l'élève pour l'amener à déterminer un résultat intermédiaire ;
— **le texte du problème** : on peut alléger la difficulté que représente ce texte en donnant le sens de mots inconnus ou en reformulant certains éléments du problème ;
— **le champ numérique** : on peut agir sur le champ numérique en remplaçant les nombres en jeu dans le problème par des nombres mieux maîtrisés par l'élève, par exemple des décimaux par des entiers, ou encore des entiers par d'autres entiers plus petits.

Ainsi en fonction de l'objectif principal de la séance, il est possible d'agir sur des curseurs qui ne dénaturent pas l'obstacle que constitue l'objectif. Par exemple, si l'objectif premier est l'aptitude à traiter des problèmes en plusieurs étapes, il ne faudra bien évidemment pas poser de question invitant à la décomposition du problème en sous-étapes ; par contre une réduction du champ numérique est tout à fait pertinente. *A contrario*, si l'objectif premier de la séance est de faire travailler les élèves avec des nombres décimaux, toute action sur le champ numérique est à proscrire et une action sur les autres curseurs est à privilégier.

EXEMPLES D'ACTIONS SUR LES TROIS CURSEURS

On peut regarder ce que donne une action sur chacun des curseurs proposés au chapitre 3 pour un problème comme celui donné dans l'introduction de ce guide :

> « *Une bouteille de jus de pomme coûte 1,87 zeds.*
> *Une bouteille de jus d'orange coûte 3,29 zeds.*
> *Julien a 4 zeds.*
> *Combien de zeds Julien doit-il avoir en plus pour acheter les deux bouteilles ?* »

Structure mathématique

— On peut demander à l'élève ce que l'on cherche. Puis lui demander ce que l'on pourrait chercher en premier.

— En cas d'absence de réponse, on peut lui demander ce que voudrait acheter Julien, puis comment trouver le prix de ce qu'il souhaite acheter. On peut aussi demander si Julien a ou non assez d'argent pour acheter les deux bouteilles.

— En cas de difficultés persistantes, le professeur peut demander à l'élève s'il saurait calculer, dans un premier temps, le prix des deux bouteilles que Julien souhaite acheter.

Texte du problème

— On peut remplacer les « zeds » par des « euros ».

— On peut aussi modifier la question en « Combien d'argent manque-t-il à Julien pour pouvoir acheter les deux bouteilles ? ».

— On peut aussi modifier le contexte du problème, par exemple en remplaçant ce problème d'argent par un problème de longueur : « *Pour se rendre au collège à vélo, Julien doit parcourir une première étape de 1,87 km jusqu'à un rond-point puis une autre de 3,29 km. Il a déjà parcouru 4 km. Quelle distance doit-il parcourir en plus pour arriver au collège ?* »

Champ numérique

On peut modifier les prix de deux façons : on peut convertir les prix en centimes de zeds ou remplacer le triplet de prix par un triplet plus facile d'accès (18 zeds, 33 zeds, 40 zeds) ou encore (2 zeds, 3 zeds, 4 zeds).

S'appuyer sur l'institutionnalisation

L'institutionnalisation désigne l'acte du professeur pour expliciter, rendre visibles les apprentissages réalisés au cours d'une séance ou d'une séquence et leur donner ainsi un statut de connaissance ou de savoir-faire, et l'élaboration de traces écrites sous forme d'affichages ou d'un paragraphe au sein d'un cahier de leçons. Cette institutionnalisation doit permettre aux élèves de prendre du recul sur ce qui a été fait, de dépersonnaliser les procédures, de les expliciter et d'en montrer le caractère général.

Ces deux points sont essentiels dans l'enseignement des mathématiques en général et dans l'enseignement de la résolution de problèmes en particulier. Il est en effet fondamental d'expliciter les objectifs et les savoirs visés et travaillés dans les séances d'apprentissage[70] ; la compréhension de ces objectifs est souvent ce qui différencie les élèves en réussite de ceux qui sont en échec. Un élève en réussite comprend qu'il a travaillé sur des problèmes où l'on compare des quantités, quand un élève en difficulté ne voit que le traitement de problèmes sur des billes. Il est aussi nécessaire que cette explicitation se traduise par une trace écrite, une trace durable, à laquelle il sera possible de se référer pour faire des transferts. Une trace écrite sous forme d'affichage permet un accès immédiat et rapide en classe et donne l'occasion de faire des analogies entre des problèmes qui n'ont aucun trait de surface commun : « Ce problème, c'est comme… ». Ces analogies sont essentielles pour faire appel à la mémoire des problèmes résolus antérieurement lors de la résolution d'un nouveau problème. Une trace écrite dans le cahier est également incontournable et nécessaire : d'une part, parce que l'écriture de la main de l'élève favorise l'appropriation et la mémorisation du savoir visé et, d'autre part, parce qu'elle contribue à développer l'autonomie de l'élève en lui permettant de s'y reporter de façon libre ; enfin, cette trace écrite permet aux familles qui le souhaitent d'avoir accès aux attentes et aux objectifs du professeur pour ce qui concerne la résolution de problèmes et ainsi de mieux accompagner leur enfant.

L'institutionnalisation en mathématiques à l'école élémentaire prend des formes variables. Il peut s'agir de définitions, de règles, de méthodes, de stratégies énoncées de façon littérale comme « Pour ajouter 9, je peux ajouter 10 puis retirer 1. » ou « Un rectangle est un quadrilatère qui a 4 angles droits. ». On peut les compléter d'un ou plusieurs exemples comme « $37 + 9 = 37 + 10 - 1 = 46$ », où le nombre 37 joue le rôle de n'importe quel nombre : c'est l'équivalent d'une lettre à valeur indéterminée, souvent « x », utilisée dans le second degré : « $x + 9 = x + 10 - 1$ ». De la même façon, un rectangle peut être défini en s'appuyant sur un dessin de rectangle générique aux quatre angles marqués d'un symbole indiquant les angles droits. Pour la résolution de problèmes, il convient sans doute de suivre le même principe en illustrant les catégories de problèmes étudiées et les outils enseignés pour faciliter la résolution de problèmes par des exemples de problèmes résolus auxquels il faudra faire référence chaque fois que cela sera utile et auxquels les élèves pourront eux-mêmes se référer lors de leurs travaux de résolution de problèmes.

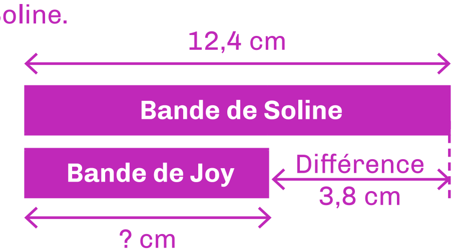
70 — Christian Doabler, Scott Baker, Derek Kosty, Keith Smolkowski, Ben Clarke, Saralyn Miller, Hank Fien, "Examining the Association Between Explicit Mathematics Instruction and Student Mathematics Achievement", *The Elementary School Journal*, n° 115, 2015.

EXEMPLE D'INSTITUTIONNALISATION D'UN PROBLÈME DE COMPARAISON ADDITIVE EN UNE ÉTAPE

Voici un exemple d'une telle institutionnalisation, pour un problème de comparaison additive en une étape ; institutionnalisation qui peut avoir sa place tant en affichage que dans les cahiers de leçons des élèves.

Problème : « *Le maître a distribué des bandes de papier dont les élèves doivent mesurer la longueur. La bande de papier de Soline mesure 12,4 cm. Elle mesure 3,8 cm de plus que la bande de Joy.*
Combien mesure la bande de papier de Joy ? »

On compare la longueur des deux bandes de papier.
La bande la plus grande est celle de Soline.



$$\begin{array}{r} 12,{}_{1}4 \\ -\ 3{}_{1},8 \\ \hline 8\ ,6 \end{array}$$

12,4 cm – 3,8 cm = 8,6 cm

La bande de Joy mesure 8,6 cm.

Il faut veiller à ce que ces problèmes types proposés en institutionnalisation restent en nombre limité pour que l'outil soit véritablement opérationnel. Idéalement, les corrections de ces problèmes types, notées dans les cahiers de leçons, sont construites collectivement avec la classe. Elles peuvent aussi s'appuyer sur la production d'un élève vidéoprojetée puis corrigée ou complétée par la classe avant d'être recopiée. La trace finale, c'est-à-dire ce qui est recopié dans le cahier ou ce qui est affiché dans la classe, émane des propositions des élèves mais correspond exactement à l'intention du professeur et à l'objectif visé à travers cette trace écrite.

Faire apparaître des structures mathématiques partagées entre les problèmes

Il y a un enjeu d'apprentissage essentiel à ce que les élèves réussissent à percevoir dans les problèmes travaillés des caractéristiques qui soient pertinentes sur le plan mathématique et sur lesquelles ils puissent s'appuyer ultérieurement dans une perspective de transfert d'apprentissage. Une difficulté est donc de distinguer ce qui relève de caractéristiques superficielles de la situation, et qui pourrait être modifié sans affecter la structure mathématique du problème, d'autres caractéristiques qui, au contraire, sont cruciales et sur lesquelles repose le fait qu'une certaine stratégie est correcte et mène à la résolution du problème. De nombreux travaux ont montré qu'ignorer les traits superficiels est très difficile, il est donc particulièrement important de rendre saillantes les caractéristiques pertinentes des problèmes sur le plan mathématique pour aller à l'encontre de cette tendance très persistante.

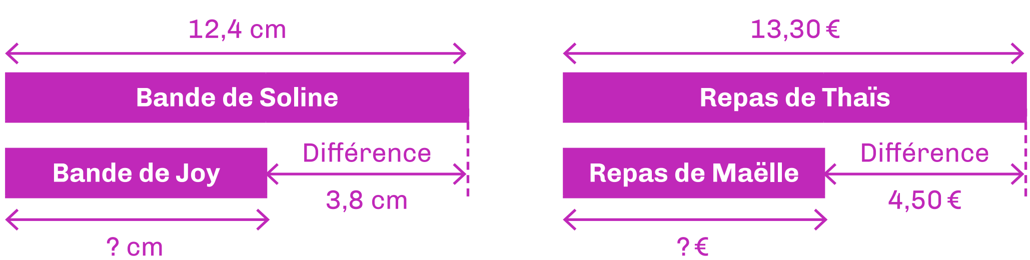
Des travaux ont mis en avant l'intérêt de recourir en classe à des activités explicites de comparaison entre situations de façon à mettre en évidence ce qu'elles ont en commun et ce qui les différencie[71]. Il s'agit pour les élèves, en comparant explicitement deux problèmes partageant une même structure mathématique mais différant par leur habillage, de chercher l'analogie entre eux, autrement dit ce qui dans un énoncé correspond à autre chose dans l'autre énoncé. De telles démarches se sont avérées efficaces notamment dans le cadre d'interventions auprès d'élèves scolarisés en éducation prioritaire[72]. Comparer différentes stratégies de résolution est également une manière de favoriser le développement de la flexibilité des élèves et de la possibilité de choisir la stratégie la plus adaptée selon le problème à résoudre[73].

L'usage des schémas renforce cette possibilité de mise en évidence des structures mathématiques communes au-delà des différences superficielles entre les énoncés. Par exemple, on peut montrer comment faire le lien entre le problème ci-dessous et le problème des bandes de papier du paragraphe précédent.

> « *Thaïs et Maëlle sont allées acheter un déjeuner dans une sandwicherie. Thaïs a payé 13,30 € pour son déjeuner. Maëlle a payé le sien 4,50 € de moins. Combien Maëlle a-t-elle payé son déjeuner ?* »

Dans le problème sur les bandes de papier de Solène et de Joy, on considère et on compare deux choses, ce sont les longueurs des bandes de papier de chacune des personnes, il y en a une plus grande et une plus petite. Dans le problème sur le déjeuner de Thaïs et Maëlle, de façon analogue, on considère et on compare deux grandeurs, ce sont les prix des repas des deux personnes, il y en a un plus cher et un moins cher.

Dans les deux problèmes, on connaît le plus grand des deux, c'est la longueur de la bande de Joy ou le prix du repas de Thaïs, et on connaît aussi la différence entre les deux, différence de longueur entre les deux bandes ou différence de prix entre les deux repas. Dans les deux problèmes, on cherche la plus petite des deux valeurs, la longueur de la bande de Joy pour le premier problème ou le prix du repas de Maëlle dans le nouveau problème.



71 — Michael Vendetti, Bryan Matlen, Lindsey Richland, Silvia Bunge, "Analogical Reasoning in the Classroom: Insights From Cognitive Science", *Mind Brain and Education*, Vol. 9, n° 2, 2015.
72 — Sylvie Gamo, Sandra Nogry, Emmanuel Sander, « Apprendre à résoudre des problèmes en favorisant la construction d'une représentation alternative chez des élèves scolarisés en éducation prioritaire », *Psychologie française*, n° 59, 2014.
73 — Kelley Durkin, Jon R. Star, Bethany Rittle-Johnson, "Using Comparison of Multiple Strategies in the Mathematics Classroom: Lessons Learned and Next Steps", *ZDM - Mathematic Education*, n° 49, 2017.

Des analogies entre des problèmes pouvant sembler encore beaucoup plus éloignés peuvent également être faites. Cette approche peut être extrêmement utile pour montrer que deux énoncés qui semblent aussi différents que « *J'ai dépensé 7,85 €. Il me reste 6,50 €. Combien d'argent avais-je avant mon achat ?* » et « *Ismaël a 7,85 € et sa sœur Éléna a 6,50 €. Combien d'argent ont-ils en tout ?* » sont analogues dès lors que l'on prend conscience que l'argent que j'avais avant mon achat peut être conçu comme un tout dont une partie est constituée de l'argent dépensé et l'autre partie est constituée de l'argent qu'il me reste. Il est ainsi possible de rendre visibles, dans une situation où cela est difficile à percevoir, des caractéristiques non intuitives au premier abord[74].

S'appuyer sur l'évaluation pour renforcer les apprentissages

L'évaluation permet d'éclairer le professeur sur les connaissances et compétences des élèves, en complément de la prise d'information en continu, pendant les séances de résolution de problèmes.

L'évaluation a pour but premier de contribuer au développement des compétences des élèves en résolution de problèmes. L'effet positif sur les apprentissages de petites évaluations courtes mais fréquentes a été clairement mis en lumière par des travaux de recherche[75]. Ces évaluations courtes, sous la forme d'un unique problème, permettent aux élèves de renforcer leur attention sur des outils particuliers ou des stratégies qui leur ont été enseignées. En complément des évaluations courtes, des évaluations plus longues sont utiles pour vérifier l'aptitude des élèves à réinvestir l'ensemble des acquis, à prendre des décisions sur les outils à utiliser ou les stratégies à mettre en œuvre. Ces évaluations ne doivent, bien entendu, pas être centrées sur un type de problèmes unique ni sur une opération ciblée afin de pouvoir cerner l'aptitude des élèves à prendre des décisions.

Le choix des problèmes retenus au sein d'une évaluation est particulièrement important ; ce choix peut notamment s'appuyer sur les différents éléments fournis dans ce guide afin de contrôler finement la difficulté des tâches proposées et de s'assurer que ces problèmes soient accessibles aux élèves et permettent d'évaluer si ces derniers ont effectivement acquis les connaissances visées pour franchir les obstacles que présente la résolution des problèmes retenus.

Les évaluations gagnent à être pensées en amont de séquence afin d'avoir ensuite clairement à l'esprit les objectifs fixés et les connaissances et compétences que les élèves doivent avoir acquises en fin de séquence. Les évaluations doivent aussi permettre de s'assurer que les connaissances et compétences acquises lors de séquences précédentes sont toujours mobilisables par les élèves.

---

74 — Katarina Gvozdic, Emmanuel Sander, "Learning to Be an Opportunistic Word Problem Solver: Going Beyond Informal Solving Strategies", *ZDM – Mathematic Education*, n° 52, 2019.

75 — Henry Roediger, Jeffrey Karpicke, "Test-Enhanced Learning: Taking Memory Tests Improves Long-Term Retention", *Psychological Science*, n° 17, 2006.

La résolution de problèmes a bien évidemment également sa place dans le cadre d'évaluations ne portant pas en priorité sur les connaissances et les compétences relatives à la résolution de problèmes : évaluations sur des connaissances sur les nombres, sur le calcul, sur les grandeurs et mesures, etc.

Questions fréquemment posées sur l'organisation de l'enseignement de la résolution de problèmes

Faut-il des séances spécifiques pour la résolution de problèmes dans l'emploi du temps ?
Ceci importe peu et dépend des préférences d'organisation de chaque professeur. Ce qui importe, c'est que les élèves soient confrontés à des résolutions de problèmes chaque jour ou presque et que, chaque semaine au moins, une séance soit consacrée essentiellement à la résolution de problèmes, même si l'objectif principal de cette séance n'est pas directement la résolution de problèmes ; il peut s'agir, par exemple, d'une séance sur les unités de masse ou encore sur les nombres décimaux.

À quelle fréquence doit-on travailler la résolution de problèmes ?
Les élèves doivent résoudre des problèmes quasi quotidiennement, même s'il ne s'agit pas de l'objectif principal. Au moins une séquence par période doit être spécifiquement consacrée au développement de connaissances et de compétences liées à la résolution de problèmes pour que l'ensemble des objectifs visés au cours moyen puissent être atteints.

Combien de problèmes faut-il traiter chaque semaine ?
L'importance de la mémoire des problèmes résolus pour résoudre de nouveaux problèmes met en lumière la nécessité de nourrir cette mémoire en résolvant de nombreux problèmes chaque semaine. La séance de calcul mental présentée précédemment (« Exemple 2 : Une séance de résolution de problèmes avec le procédé La Martinière », voir p. 97) montre comment huit problèmes peuvent être proposés dans une séance d'une vingtaine de minutes. Le paragraphe sur la différenciation montre que le nombre de problèmes résolus n'est pas nécessairement le même pour tous les élèves au sein d'une classe. S'il est clair qu'une dizaine de problèmes par semaine est un nombre plancher en-deçà duquel il semble déraisonnable de descendre, les élèves d'une classe travaillant régulièrement la résolution de problèmes et ayant développé de solides compétences peuvent certainement en traiter le double chaque semaine.

Doit-on faire créer des problèmes aux élèves ?
La création de problèmes est une tâche particulièrement importante et utile pour les élèves[76]. En les invitant à créer des problèmes, on les encourage à porter un autre regard sur les problèmes, à avoir une intention quand ils écrivent l'histoire de leur problème et quand ils posent la question du problème créé. La pratique relativement fréquente de production de problèmes avec certaines contraintes les conduira à s'interroger, lors de la résolution d'un problème, sur l'intention de l'auteur du problème qui leur est soumis et donc à mieux cerner la tâche qui leur est dévolue.

Doit-on proposer aux élèves de travailler en groupes en résolution de problèmes ?
Cela n'est ni obligatoire ni interdit. Il est évident que les élèves doivent développer des compétences personnelles en résolution de problèmes et donc qu'ils doivent être, dans la majorité des cas, confrontés à des temps de recherches individuelles. Néanmoins, des chercheurs ont mis en évidence les effets positifs que peut avoir le travail en groupe en résolution de problèmes, notamment pour permettre la co-construction de démarches riches et variées. Ils insistent également sur le rôle essentiel du professeur pendant les temps de travaux en groupe, « pour dynamiser les interactions entre élèves, pour choisir les moments opportuns de donner des indices ou encore pour mettre en œuvre d'autres processus de régulation s'intégrant dans la démarche de raisonnement des élèves »[77]. Il est donc tout à fait envisageable, lors de certaines séances sur la résolution de problèmes, d'inviter les élèves à travailler en groupe. Il reste cependant souvent préférable de laisser un temps individuel d'appropriation du problème à chaque élève avant la mise au travail en groupe et il est nécessaire de garder à l'esprit l'importance du rôle du professeur pendant ces travaux en groupe.

Faut-il un cahier spécifique pour la résolution de problèmes ?
Il n'y a sans doute pas de raison d'avoir une doctrine forte sur ce point. Cependant la résolution de problèmes n'est pas une tâche à part des mathématiques et fait, au contraire, partie intégrante de cet enseignement. Il semble donc plus logique de traiter la résolution de problèmes là où est habituellement traité ce domaine d'apprentissage, que ce soit dans le cahier du jour ou dans un cahier spécifique pour les exercices de mathématiques.

La manipulation est-elle obligatoire au cours moyen ? Quel matériel utiliser ?
La manipulation est sans doute moins centrale au cours moyen qu'au cycle 2. Certains élèves n'auront plus du tout besoin de manipuler d'objets matériels à ce stade de la scolarité et se contenteront aisément des schémas mis à leur disposition ou construits par leurs soins, mais pour d'autres elle peut rester encore essentielle. Cette manipulation peut concerner des outils spécifiques aux mathématiques, notamment pour mieux comprendre les nombres et les calculs en jeu (matériel multibase, réglettes Cuisenaire ©, glisse-nombre[78], etc.), mais aussi du matériel adapté pour jouer la situation-problème et ainsi mieux la comprendre (images, monnaie, cubes, jetons, bandelettes de papier, etc.).

76 — Florence Mihaela Singer, Nerida F. Ellerton, Jinfa Cai, *Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice*, Springer, 2005.
77 — Isabelle Demonty, Virginie Dupont, Annick Fagnant, « Analyse des régulations interactives entre élèves lors de la résolution d'un problème mathématique en groupe », *Les Cahiers des sciences de l'éducation*, n° 36, 2014.
78 — http://cache.media.education.gouv.fr/file/Fractions_et_decimaux/42/2/RA16_C3_MATH_frac_dec_annexe_4_673422.pdf

Quelles traces garder des activités de résolution de problèmes ?
La question des traces est importante. En effet, la résolution de problèmes devant s'appuyer sur la mémoire des problèmes résolus, il est important que des traces permettent la constitution de cette mémoire. Ces traces sont de deux ordres :

— d'une part les traces quasi quotidiennes dans le cahier où les mathématiques sont traitées, permettant ainsi de revenir aisément sur un problème traité précédemment ;
— d'autre part les traces construites dans le cadre des institutionnalisations, dans le cahier de leçons ou en affichages, qui servent de base à la mémoire collective et auxquelles il est fait référence autant que nécessaire.

Où peut-on trouver des banques de problèmes ?
Les manuels scolaires sont sans doute la principale source où trouver des énoncés de problèmes. Le présent guide et les nombreux problèmes qu'il contient (plus de 200) peuvent bien évidemment enrichir les problèmes présents dans les manuels. Il est également intéressant de construire des problèmes en lien direct avec des activités de la classe (voyages scolaires, activités sportives, sorties culturelles, livres lus par toute la classe, etc.) ou des événements étudiés en classe (événements organisés localement, compétitions sportives nationales ou internationales comme les Jeux Olympiques, le Vendée Globe ou une coupe du monde sportive, événements d'actualité comme une mission dans l'espace, etc.).

Enseigner explicitement des méthodes de représentation efficaces pour modéliser

Les stratégies de recherche pour résoudre un problème et en particulier pour le modéliser peuvent être variées : commencer en traitant un problème plus simple, faire des essais et vérifier ce que cela donne, essayer de lister toutes les solutions possibles, etc. Cependant une aide importante peut être obtenue, dans la plupart des cas, en effectuant un schéma. Tous les schémas ne se valent pas, certains pouvant être excessivement longs à réaliser et sources d'erreurs : par exemple, représenter les 142 élèves d'une école en effectuant 142 petits ronds… D'autres schémas peuvent être simples à réaliser mais ne pas apporter d'éclairage sur le modèle mathématique sous-jacent. D'autres encore peuvent être efficaces pour modéliser, mais si complexes à réaliser, qu'ils rajoutent de la difficulté plus qu'ils n'allègent la tâche des élèves.

La réalisation d'un schéma ne doit jamais être exigée, sauf dans le cas particulier de séances spécifiques d'apprentissage d'un nouveau modèle de schéma et uniquement pour des problèmes pour lesquels ces schémas sont utiles aux élèves. La réalisation d'un schéma ne doit pas constituer une étape qui engendrerait des difficultés supplémentaires lors de la résolution d'un problème, mais elle doit, au contraire, permettre de rendre plus visuelles les tâches à réaliser et les relations entre les nombres ou les grandeurs et de soulager la mémoire de travail. Dans les cas les plus simples, les élèves pourront progressivement se passer des schémas qui leur étaient précédemment nécessaires. Ils pourront éventuellement les remobiliser lorsque les nombres en jeu seront moins familiers, le schéma permettant ainsi de soulager la mémoire de travail. Lorsqu'un élève rencontre des difficultés pour modéliser un problème, le professeur pourra l'inviter à produire un schéma s'appuyant sur sa compréhension de la situation. Un schéma produit par un élève pourra être un point d'appui pour aider le professeur à mieux analyser les difficultés rencontrées lors de la modélisation du problème.

Si faire des schémas peut s'avérer particulièrement efficace, l'aptitude à choisir un schéma pertinent et à réaliser ce schéma requiert un apprentissage. La compétence « représenter » doit, par conséquent, faire l'objet d'un enseignement explicite ; le professeur doit donner à voir aux élèves un type de schéma efficace pour résoudre un problème donné. L'enseignement des schémas doit être cohérent tout au long de l'année scolaire, mais devrait l'être aussi tout au long de la scolarité pour être d'autant plus efficace.

Ce paragraphe propose de développer l'enseignement de quatre types de schémas devant être connus des élèves de cours moyen. Les élèves doivent savoir les produire, mais aussi, et surtout, savoir quand il est pertinent de les utiliser :

- les schémas en barres ;
- les schémas proposant un déplacement sur une droite numérique ou une ligne du temps ;
- les tableaux ;
- les arbres.

L'enseignement de ces schémas à l'école élémentaire est important pour la suite de la scolarité, car ils seront réinvestis et utilisés au collège puis au lycée.

Les schémas en barres

DES SCHÉMAS PRÉSENTS DEPUIS LONGTEMPS DANS LES ÉCOLES FRANÇAISES

Les schémas en barres sont utilisés depuis plusieurs décennies en France et on en trouve aisément dans les manuels utilisés au cours du XX[e] siècle, comme on peut le voir dans les exemples ci-après.

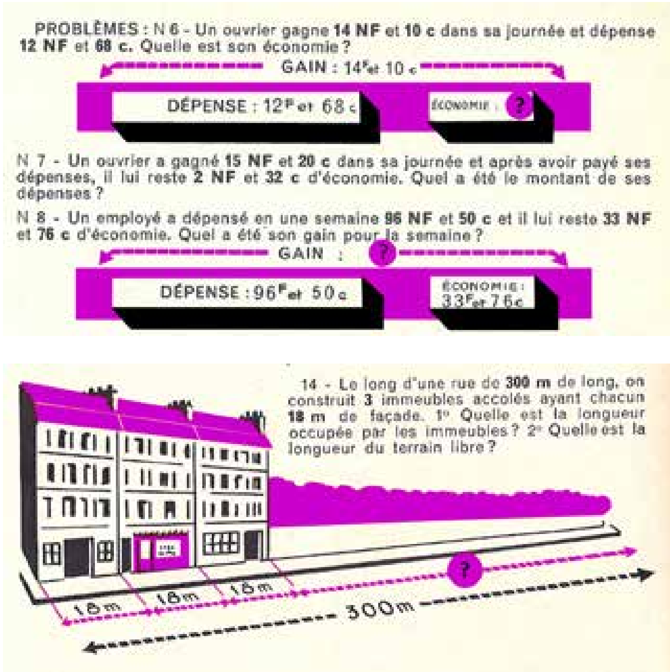


Figure 6. Extraits d'un manuel utilisé en France dans les années 1950 et 1960[79].

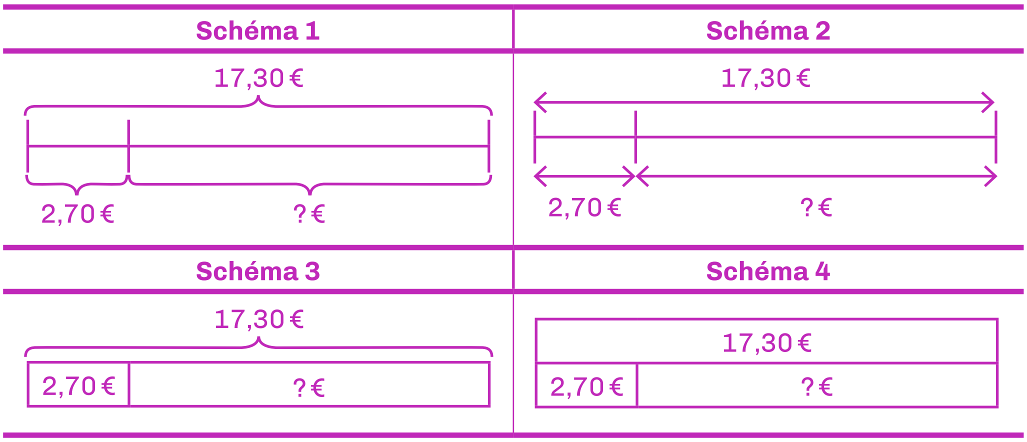
Au début des années 1980, après un constat de difficultés importantes des élèves singapouriens en mathématiques, le ministère chargé de l'éducation de Singapour a décidé de mener plusieurs réformes touchant les formations initiale et continue des professeurs en visant tout particulièrement l'enseignement des mathématiques et en s'appuyant, notamment, sur l'état de la recherche internationale en didactique des mathématiques[80]. Ces réformes ont eu un effet considérable ; le pays trône aujourd'hui systématiquement en tête des classements des évaluations internationales des élèves en mathématiques. Pour la résolution de problèmes mathématiques, une approche qualifiée de « concrète-imagée-abstraite » a été mise en avant ; le renforcement de la phase intermédiaire « imagée » s'est traduit par l'introduction d'une organisation de schématisation s'appuyant sur quatre types de schémas en barres. De nombreuses recherches à Singapour, mais aussi dans d'autres pays, ont montré l'efficacité de l'utilisation des schémas en barres, y compris pour les élèves rencontrant des difficultés en mathématiques[81].

PLUSIEURS TYPES DE SCHÉMAS EN BARRES POSSIBLES

Plusieurs types de schémas apparaissent aujourd'hui dans les différents ouvrages ou formations délivrées en France, comme les quatre proposés ci-dessous pour la résolution du problème additif de type parties-tout suivant.

> « *Côme a dépensé 17,30 € à la boulangerie pour acheter un pain aux céréales et une tarte aux abricots. Il se souvient que le pain aux céréales coûte 2,70 € mais a oublié le prix de la tarte aux abricots.*
> *Quel est le prix de la tarte aux abricots ?* »

79 — Albert Châtelet et Georges Condevaux, *J'apprends à calculer, Arithmétique Cours élémentaire et classes de 10e et 9e*, Bourrelier, 1962.
80 — Swee Ng, Kerry Lee, "The Model Method: Singapore Children's Tool for Representing and Solving Algebraic Word Problems", *Journal for Research in Mathematics Education*, n° 40, 2009.
81 — *Ibid*, p. 67, note 51.



Dans ce guide, nous utiliserons systématiquement la forme du schéma 3 pour les problèmes de parties-tout. Les autres schémas peuvent également être utilisés ; cependant, afin de ne pas perturber les élèves, il est préférable de suivre une même façon de faire d'année en année au sein d'une même école.

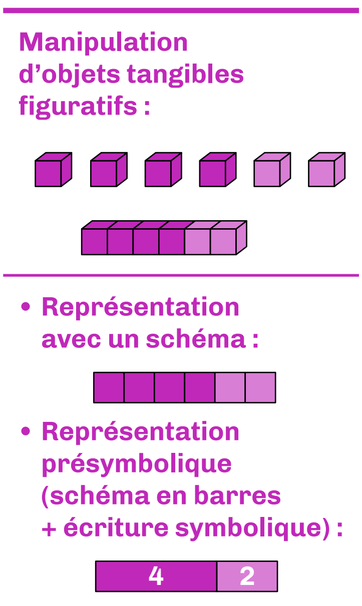


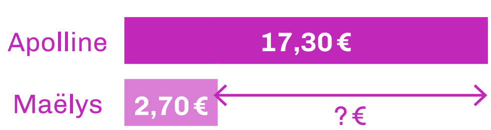
Figure 7. Extrait du guide *Les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP*, p. 84.

Le choix du schéma 3 permet une continuité avec ce qui est proposé dans le guide *Les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP* (collection « Les guides fondamentaux pour enseigner »)[82], et de faire le lien avec les manipulations menées, comme indiqué sur la figure ci-contre.

Utiliser des barres épaisses, plutôt qu'une ligne simple (comme dans les schémas 1 et 2), permet de donner davantage de matérialité aux grandeurs ou objets en jeu dans le problème et de rapprocher les représentations des objets manipulés (cubes).

L'utilisation d'une barre simple dans les problèmes de parties-tout (contrairement à la barre double utilisée dans le schéma 4) permet de ne pas matérialiser deux fois les mêmes objets et de rendre ainsi explicites les relations d'inclusion présentes dans le problème : les 2,70 € n'existent pas à côté des 17,30 €, mais ils sont une partie des 17,30 €. En revanche, on utilisera une double barre pour des problèmes de comparaison, comme le problème ci-après.

« *À la fête foraine, Apolline a dépensé 17,30 € et Maëlys, sa sœur, a dépensé 2,70 €. Combien Apolline a-t-elle dépensé de plus que sa sœur ?* »



82 — https://eduscol.education.fr/1486/apprentissages-au-cp-et-au-ce1

Dans le schéma ci-dessus, les sommes d'argent sont distinctes et donc matérialisées par deux barres disjointes ; la différence entre les deux (ce que l'on cherche) n'a pas de matérialité et est représentée par une flèche sans épaisseur.

Enfin, la principale raison du choix du schéma 3 pour les exemples présentés dans ce guide est qu'il s'agit de la forme utilisée dans les pays utilisant des schémas en barres pour la résolution de problèmes et de la forme utilisée dans les recherches qui ont permis de démontrer son efficacité, notamment auprès des élèves fragiles en mathématiques[83].

UN MODÈLE RETENANT QUATRE TYPES DE SCHÉMAS EN BARRES

Le système de représentation schématique avec des barres s'appuie sur quatre schémas types correspondant à quatre familles de problèmes en une étape :

Problèmes additifs de parties-tout	Problèmes additifs de comparaison
Problèmes multiplicatifs de parties-tout	Problèmes multiplicatifs de comparaison

Les quatre schémas correspondants sont présentés ci-après.

— **Problème additif** (se traitant avec une addition ou une soustraction) **de parties-tout** (un tout, un ensemble, est constitué de plusieurs parties disjointes, dont la réunion forme ce tout).

« *Lou paie 146,80 € avec sa carte bancaire dans un magasin de bricolage. Il lui reste maintenant 743,55 € sur son compte en banque. Combien d'argent Lou avait-elle sur son compte en banque avant son achat ?* »

Pour ce problème, les élèves doivent comprendre qu'ils doivent trouver le tout, correspondant à la somme d'argent possédée avant l'achat, qui est subdivisée en deux sous-parties, d'une part l'argent dépensé dans le magasin et d'autre part l'argent restant sur le compte en banque après l'achat.

Exemple de résolution avec un schéma en barres :

146,80 € + 743,55 € = 890,35 €
Lou avait 890,35 € sur son compte avant son achat.

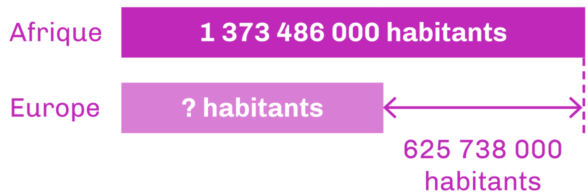
— **Problème additif** (se traitant avec une addition ou une soustraction) **de comparaison** (deux grandeurs sont comparées additivement).

« *Selon le site de l'institut national d'études démographiques (Ined), en 2021, il y avait 625 738 000 habitants de plus en Afrique qu'en Europe et le nombre d'habitants en Afrique était de 1 373 486 000. Quel était, selon l'Ined, le nombre d'habitants en Europe en 2021 ?* »

Pour ce problème, on compare le nombre d'habitants de deux continents.

83 — Voir p. 49, note 48.

Exemple de résolution avec un schéma en barres :



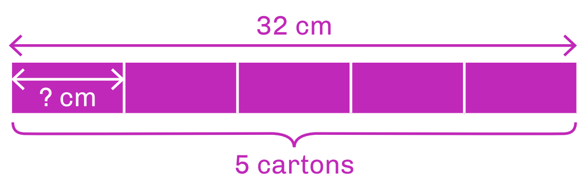
1 373 486 000 – 625 738 000 = 747 748 000
Il y avait 747 748 000 habitants en Europe en 2021.

— **Problème multiplicatif** (se traitant avec une multiplication ou une division) **de parties-tout** (un tout, un ensemble, est constitué de plusieurs parties identiques pour une grandeur donnée).

« *Inaya souhaite fabriquer cinq invitations pour son anniversaire en découpant une bande de papier cartonné d'une longueur de 32 cm.*
Quelle est la plus grande longueur qu'elle peut choisir pour que toutes les invitations aient la même longueur ? »

Il s'agit ici de trouver la valeur d'une part.

Exemple de résolution avec un schéma en barres :



32 cm ÷ 5 = 6,4 cm
Inaya peut découper des cartons de 6,4 cm de longueur.

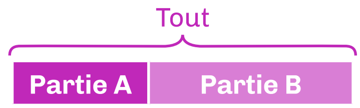
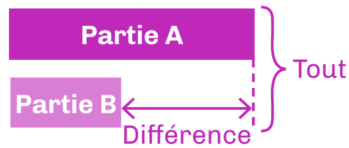
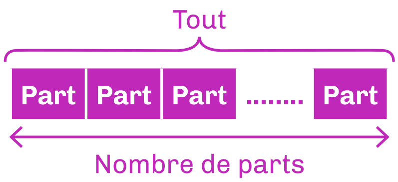
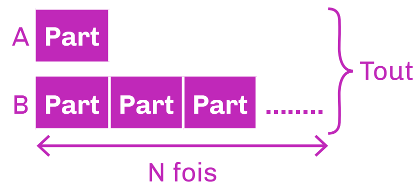
— **Problème multiplicatif** (se traitant avec une multiplication ou une division) **de comparaison** (deux grandeurs sont comparées multiplicativement).

« *Juliette et Ayoub jouent à la bataille avec un jeu de 56 cartes qu'ils ont fabriqué.*
Juliette a sept fois plus de cartes qu'Ayoub.
Combien Ayoub a-t-il de cartes ? »

Exemple de résolution avec un schéma en barres :

56 cartes ÷ 8 = 7 cartes
Ayoub a 7 cartes.

Les quatre types de schémas sont présentés sous forme synthétique dans le tableau ci-après. Ce tableau avec les abus de notation qu'il contient n'est bien évidemment qu'à l'usage des professeurs et n'est pas destiné aux élèves, comme cela est indiqué dans le paragraphe précédent sur l'institutionnalisation : pour les élèves, ces schémas apparaissent dans les cahiers de leçons et sur d'éventuelles affiches dans le cadre de résolutions de problèmes particuliers, auxquels on donne une valeur générique.

Problèmes...	de parties-tout	de comparaison
additifs	 Tout = Partie A + Partie B Partie B = Tout – Partie A	 Différence = Partie A – Partie B Partie A = Partie B + Différence Tout = Partie A + Partie B
multiplicatifs	 Tout = Nombre de parts x Part Nombre de parts = Tout ÷ Part Part = Tout ÷ Nombre de parts	 B = N x A A = B ÷ N et N = B ÷ A Tout = A + B

ADAPTATION AUX PROBLÈMES EN PLUSIEURS ÉTAPES

Les résolutions de problèmes en plusieurs étapes peuvent également s'appuyer sur des schémas en barres. Selon les cas, un ou plusieurs schémas peuvent être utilisés.

> « *Il y a 1 330 500 élèves scolarisés dans les écoles de la région Île-de-France. Ils sont répartis dans 3 académies. Au sein de l'académie de Versailles, il y a 646 663 élèves, 163 460 élèves sont scolarisés dans l'académie de Paris, et les autres sont scolarisés dans l'académie de Créteil.*
> *Combien d'élèves sont scolarisés dans l'académie de Créteil ?* »

Le schéma en barres correspondant à la situation est donc constitué de trois parties formant un tout.

Une modélisation apparaît alors de façon évidente pour déterminer la valeur de la troisième partie. Il suffit de faire une addition pour déterminer le nombre d'élèves à Versailles et Paris, puis de soustraire le résultat obtenu à l'ensemble des élèves d'Île-de-France pour trouver le nombre d'élèves à Créteil :
646 663 + 163 460 = 810 123
Il y a 810 123 élèves dans les académies de Paris et Versailles.
1 330 500 – 810 123 = 520 377

Il y a 520 377 élèves dans l'académie de Créteil.

Comme cela a été présenté dans le chapitre 2, les schémas en barres peuvent soutenir la modélisation du problème sur les jus de fruits issu de l'évaluation Timss.

> « *Une bouteille de jus de pomme coûte 1,87 zeds.*
> *Une bouteille de jus d'orange coûte 3,29 zeds.*
> *Julien a 4 zeds.*
> *Combien de zeds Julien doit-il avoir en plus pour acheter les deux bouteilles ?* »

Exemple de résolution utilisant un schéma en barres :

1,87 zeds + 3,29 zeds = 5,16 zeds. Les deux bouteilles de jus de fruits coûtent 5,16 €.
5,16 zeds – 4 zeds = 1,16 zeds
Il faudrait 1,16 zeds en plus à Julien pour acheter les deux bouteilles.

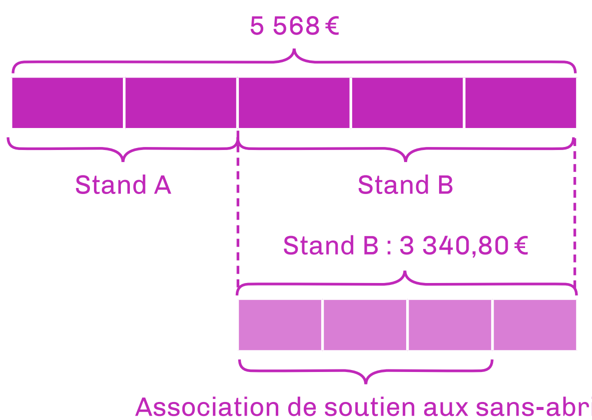
Pour certains problèmes en plusieurs étapes, il peut être difficile de faire apparaître toutes les informations sur un unique schéma et l'on peut préférer effectuer plusieurs schémas successifs correspondant aux différentes étapes.

> « *Lors d'une vente solidaire pour des associations, deux stands ont permis de récolter 5 568 €. Les deux cinquièmes de cette somme ont été récoltés par le stand A et le reste par le stand B.*
> *Le stand B a décidé de remettre les trois quarts de la somme qu'il a récoltée à une association de soutien aux personnes sans-abri.*
> *Combien le stand B va-t-il remettre à cette association ?* »

Les schémas en barres ci-dessous peuvent soutenir le traitement de chaque étape.

5 568 € ÷ 5 = 1 113,60 €
1 113,60 € x 3 = 3 340,80 €
Le stand B a récolté 3 340,80 €.

3 340,80 ÷ 4 = 835,20 €
835,2 x 3 = 2 505,60 €
Le stand B va remettre 2 505,60 € à l'association de soutien aux personnes sans-abri.



LES SCHÉMAS EN BARRES POUR TRAITER DES PROBLÈMES ALGÉBRIQUES

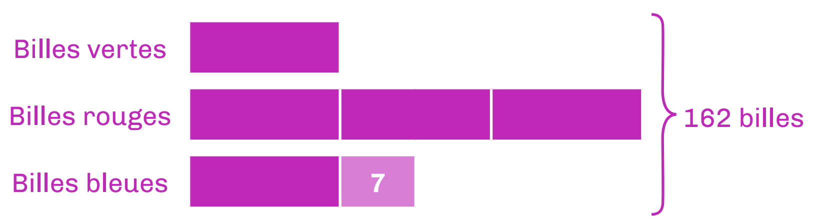
Les schémas en barres s'avèrent être un outil particulièrement efficace pour résoudre les problèmes algébriques[84] ; problèmes qui pourront être traités au collège en utilisant des mises en équations du premier degré. Ce type de problèmes est présenté dans le paragraphe sur les problèmes atypiques au chapitre 1. Des exemples de tels problèmes sont proposés ci-dessous.

3 EXEMPLES DE PROBLÈMES ALGÉBRIQUES TRAITÉS AVEC DES SCHÉMAS EN BARRES

EXEMPLE 1

« Dans un paquet de billes rouges, vertes ou bleues, il y a 162 billes. Il y a trois fois plus de billes rouges que de billes vertes et 7 billes vertes de moins que de billes bleues.
Combien y a-t-il de billes rouges ? »

En représentant le nombre de billes vertes par un rectangle violet, on peut représenter le nombre des autres billes en s'appuyant sur ce rectangle violet.



Cherchons le nombre de billes représenté par les 5 rectangles violets.
162 billes – 7 billes = 155 billes
Cherchons le nombre de billes représentées par 1 rectangle violet.
155 billes ÷ 5 = 31 billes
3 x 31 billes = 93 billes
Il y a donc 93 billes rouges.

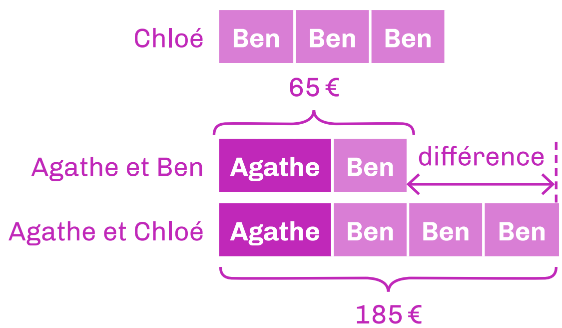
Comme cela a été vu précédemment, au cycle 4 ce problème pourra être traité en désignant par v le nombre de billes vertes. Il y a alors $3v$ billes rouges et $(v + 7)$ billes bleues, d'où l'équation à résoudre $v + 3v + (v + 7) = 162$, d'où $5v = 162 - 7$. Les similitudes fortes entre les deux raisonnements apparaissent clairement.

84 — Swee Ng, Kerry Lee, "The Model Method: Singapore Children's Tool for Representing and Solving Algebraic Word Problems", *Journal for Research in Mathematics Education*, n° 40, p. 282-313, 2009.

EXEMPLE 2

L'exemple ci-dessous est similaire, avec une résolution par substitution[85].

> *« Agathe et Ben ont dépensé 65 €. Agathe et Chloé ont dépensé 185 €. Chloé a dépensé trois fois plus que Ben.*
> *Combien Agathe a-t-elle dépensé ?[86] »*



185 € – 65 € = 120 €
La différence entre les sommes dépensées par « Agathe et Chloé » et « Agathe et Ben » est 120 €.

120 € ÷ 2 = 60 €
Ben a dépensé 60 €.
65 € – 60 € = 5 €
Agathe a dépensé 5 €.

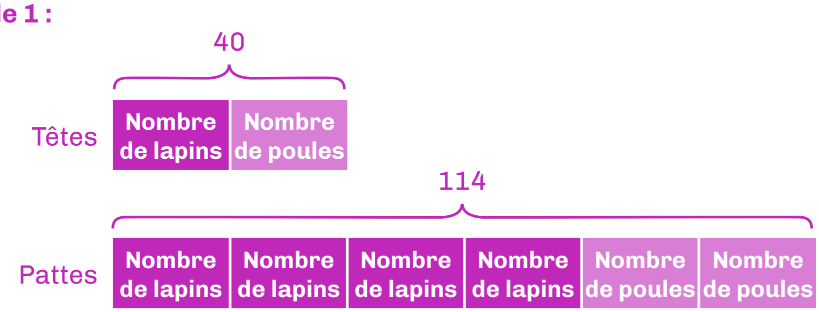
EXEMPLE 3

Pour terminer avec ces exemples de problèmes algébriques, le problème ci-dessous correspond à un exemple classique de problème pouvant se traiter en résolvant un système de deux équations à deux inconnues.

> *« Dans une volière, il y a des lapins et des poules. Pour faire trouver le nombre de poules et de lapins à son frère, Cindy lui dit qu'il y a 114 pattes et 40 têtes.*
> *Combien y a-t-il de poules et combien y a-t-il de lapins dans la volière ? »*

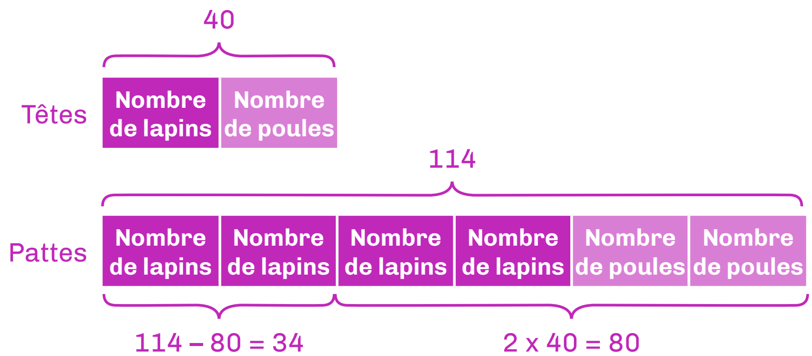
Plusieurs méthodes peuvent être suivies, en voici deux exemples.

Méthode 1 :



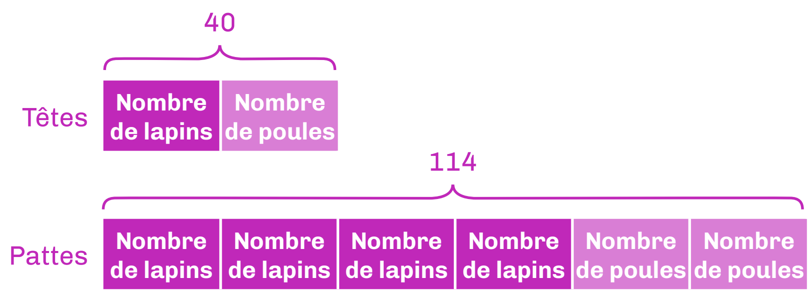
85 — Méthode de résolution d'un système d'équations à plusieurs inconnues consistant à exprimer la valeur d'une inconnue en fonction des autres inconnues, puis à remplacer cette première dans les autres équations.
86 — *Ibid*, p. 67, note 51.

Le schéma peut alors être aisément complété en remarquant que dans la deuxième barre apparaît deux fois la quantité représentée dans la première barre, c'est-à-dire 2 fois 40.

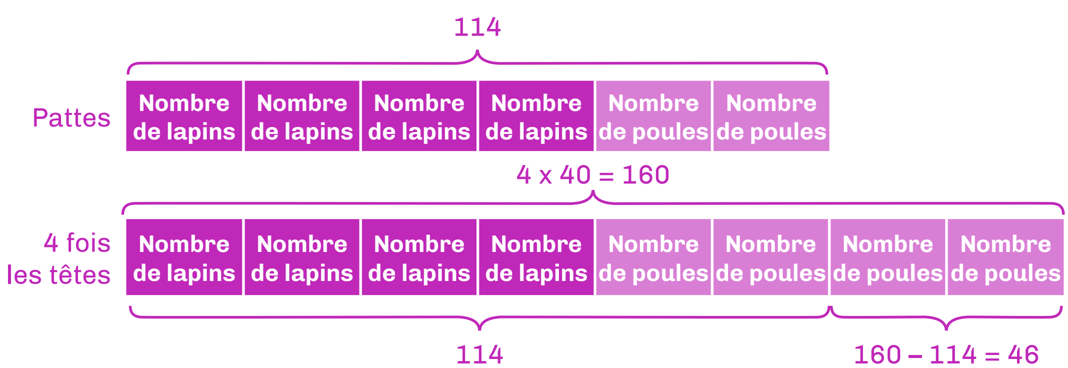


On en déduit le nombre de lapins : 34 ÷ 2 = 17 ; il y a 17 lapins.
Et le nombre de poules : 40 – 17 = 23 ; il y a 23 poules.

Méthode 2 :



Le schéma peut alors être complété en faisant apparaître le nombre de pattes dans une barre représentant 4 fois le nombre de têtes qui est égal à 4 fois le nombre de lapins plus 4 fois le nombre de poules.



On en déduit le nombre de poules :
46 ÷ 2 = 23 ; il y a 23 poules.

Et le nombre de lapins :
40 – 23 = 17 ; il y a 17 lapins.

QUELQUES QUESTIONS RÉGULIÈREMENT POSÉES SUR L'ENSEIGNEMENT DES SCHÉMAS EN BARRES

À quel moment de la scolarité doit-on commencer à utiliser les schémas en barres ? Et jusqu'à quel niveau sont-ils utiles ?
Les schémas en barres sont souvent introduits en deuxième année d'école élémentaire. Les schémas de parties-tout (additifs) sont parfois introduits dès le CP.

Comment mettre en place la schématisation en barres au cycle 3 lorsque cela n'a pas été fait au cycle 2 ?
Il faut introduire les choses progressivement, comme cela aurait été fait au cycle 2. Il faut plusieurs mois pour que les choses deviennent véritablement opérationnelles pour les élèves, il y a donc un intérêt fondamental pour les apprentissages des élèves à ce que les professeurs s'accordent sur ce qui est enseigné année après année.

Les longueurs des barres doivent-elles être proportionnelles aux quantités ou grandeurs qu'elles représentent ?
La réponse est clairement non. Cela est souvent impossible car on ne connaît pas, au moment où l'on construit le schéma, les quantités ou les mesures de ce qui est représenté. Même quand ces données sont connues, les quantités ou les grandeurs en jeu peuvent être dans des rapports très élevés, par exemple une partie correspondant à 0,1 % d'un tout, ce qui rend impossible un respect des proportions sur le schéma. Il est cependant essentiel de représenter par des rectangles identiques ce que l'on sait égal (on se prépare à l'algèbre) et d'essayer de représenter par des rectangles plus longs ce qui correspond à des quantités ou mesures plus importantes dans des problèmes de comparaison.

Que faire avec les élèves qui n'utilisent pas les schémas en barres qui leur ont été enseignés ?
Si un élève n'a pas besoin de faire un schéma pour résoudre un problème, on ne doit pas lui demander de le faire. La plupart des schémas sont voués à ne plus être utilisés au fur et à mesure de la progression des compétences de l'élève. Le professeur peut proposer des problèmes plus difficiles qui feront à nouveau émerger l'utilité de faire un schéma.
Si un élève ne réussit pas à traiter le problème proposé, le professeur peut demander explicitement de faire un schéma, comme première étape de résolution dans le cadre de l'accompagnement des élèves dans leur recherche.

Pour les problèmes en plusieurs étapes, faut-il un unique schéma en barres ou faut-il en dessiner plusieurs ?
Cela dépend des problèmes et des élèves. Les deux sont possibles, comme on a pu le voir dans les exemples donnés dans le paragraphe « Adaptation aux problèmes en plusieurs étapes » ; dans certains cas, faire deux schémas peut être plus simple (voir le problème sur une vente solidaire proposé précédemment ou le problème n° 7 dans le focus ci-après, sur les problèmes avec des fractions résolus à l'aide d'un schéma en barres).

Faut-il imposer un type de schéma ?
Non, mais il faut mettre en avant le ou les schémas les plus pertinents pour résoudre un problème donné en explicitant clairement l'intérêt que présentent ce ou ces schémas. Si un élève n'utilise pas le schéma que le professeur souhaite mettre en avant et utilise son propre schéma, que le professeur considère comme non pertinent, il ne faut pas imposer ce schéma, mais proposer un nouveau problème pour lequel on peut penser que l'élève sera en difficulté avec le type de schéma sur lequel il s'appuie, afin de le convaincre de la pertinence d'abandonner ce schéma dans certaines situations.

Comment faire comprendre la schématisation en barres pour les problèmes de type transformation ?
Cela peut se faire en reformulant le problème pour rendre visibles les différentes parties dans le cadre de la situation dynamique : « *Si on considère l'ensemble des billes que Louis avait avant la récréation, alors cet ensemble se sépare en deux. Il y a, d'une part, les billes qu'il a perdues pendant la récréation et, d'autre part, les billes qu'il n'a pas perdues, c'est-à-dire les billes qu'il a encore après la récréation.* » Mais on peut aussi accepter un autre schéma qu'un schéma en barres, par exemple un schéma avec un déplacement sur une ligne numérique, présenté dans le paragraphe ci-après.

Les élèves ne risquent-ils pas de remplir des cases au hasard, comme s'ils mettaient des nombres dans des opérations, sans forcément en comprendre le sens ?
Il s'agit là d'un point de vigilance. Il ne faut pas se focaliser sur le schéma terminé, ce qui compte, c'est sa construction. L'important, c'est de construire les schémas, avec les élèves, face aux élèves, en verbalisant chaque action et les relations entre les différentes données de l'énoncé et en explicitant pourquoi on construit telle ou telle chose sur le schéma. Il est important de bien légender le schéma : le nom de ce qui est représenté, les valeurs ou les proportions de l'énoncé qui sont utilisées, etc.

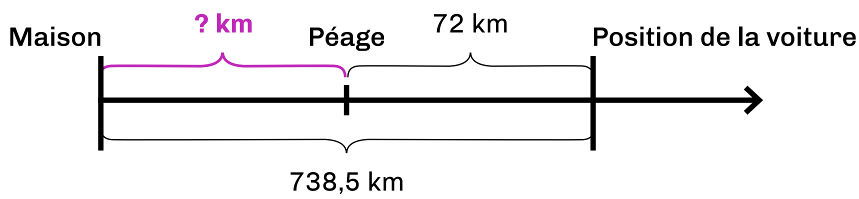
Les schémas représentant un déplacement sur une droite numérique ou une ligne du temps

Les schémas en barres peuvent se montrer peu adaptés pour la résolution de certains problèmes de transformations, en particulier quand les différents états ne sont pas connus et que la réflexion porte sur la composition des transformations.

Les schémas s'appuyant sur une ligne numérique sont particulièrement efficaces pour soutenir la résolution de problèmes liés à des évolutions d'une grandeur dans le temps ou à des déplacements dans l'espace, ou de façon plus générale des problèmes avec des transformations.

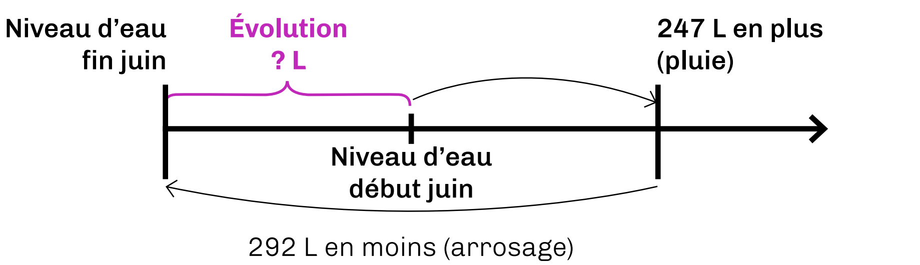
Le problème ci-dessous est un problème de déplacement dans l'espace.

> « *Léa a parcouru 72 km depuis le péage de l'autoroute. Elle a maintenant parcouru 738,5 km depuis qu'elle a quitté sa maison.*
> *Quelle distance y a-t-il entre sa maison et le péage de l'autoroute ?* »



Sur ce schéma, la droite peut être une ligne du temps ou peut représenter le déplacement dans l'espace. Un tel schéma a une proximité avec les schémas en barres pour un problème de type parties-tout, ce qui permet une modélisation facilitée pour les élèves.

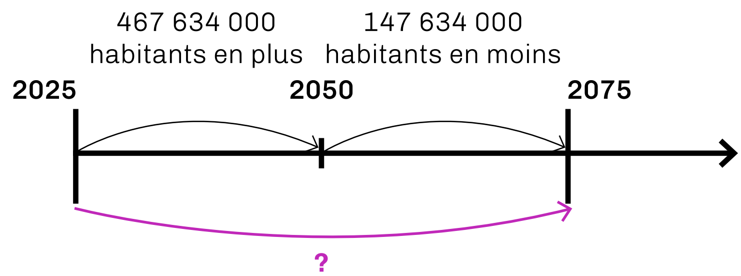
> « *Assia a un récupérateur d'eau de pluie dans son jardin. En juin, elle a pu récupérer 247 L d'eau de pluie. Pendant le mois de juin, elle a aussi utilisé 292 L d'eau du récupérateur pour arroser les plantes de son jardin.*
> *Quelle est l'évolution du volume d'eau contenue dans le récupérateur entre le début et la fin du mois de juin ?* »



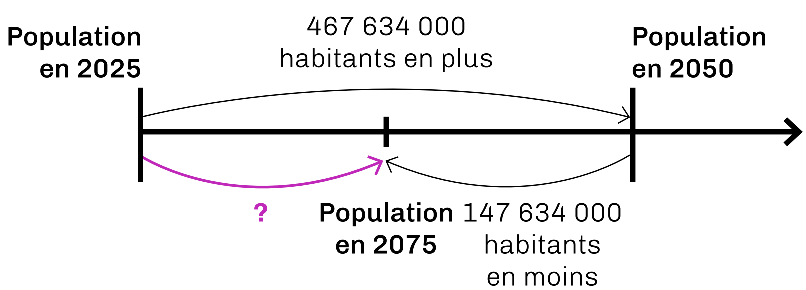
Contrairement au problème précédent, ici la droite ne représente pas la ligne du temps, mais il s'agit d'une droite numérique pour représenter le volume d'eau dans le récupérateur. Un déplacement vers la gauche correspond à une diminution du volume d'eau et vers la droite à une augmentation de ce volume.

> « *Selon l'Institut national d'études démographiques (Ined), la population asiatique devrait augmenter de 467 634 000 habitants entre 2025 et 2050, puis diminuer de 147 634 000 habitants entre 2050 et 2075.*
> *Comment devrait évoluer la population asiatique entre 2025 et 2075 ?* »

Pour ce problème d'évolutions dans le temps, la représentation sur une droite numérique peut être source de difficulté s'il y a une incompréhension par rapport à ce que représente la droite. En effet, la droite peut représenter l'axe du temps comme dans le schéma ci-dessous. On se déplace alors vers la droite quand on avance dans le temps, indépendamment de l'évolution démographique.



Mais la droite peut aussi servir à représenter le nombre d'habitants, auquel cas une augmentation de population se traduit par un déplacement vers la droite et une baisse par un déplacement vers la gauche, comme dans le schéma ci-dessous.



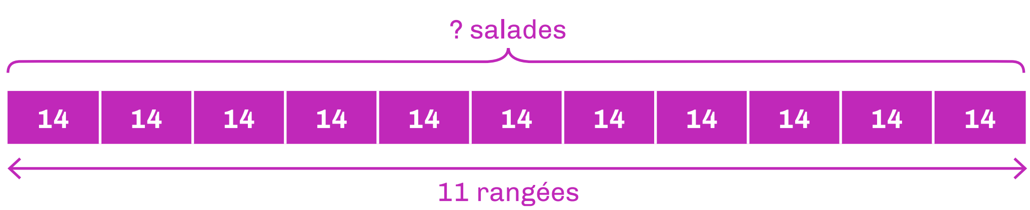
Il est donc essentiel d'être très explicite, lors de l'utilisation de tels schémas en classe, sur ce que symbolise l'axe tracé sur lequel s'appuie la représentation.

Les tableaux

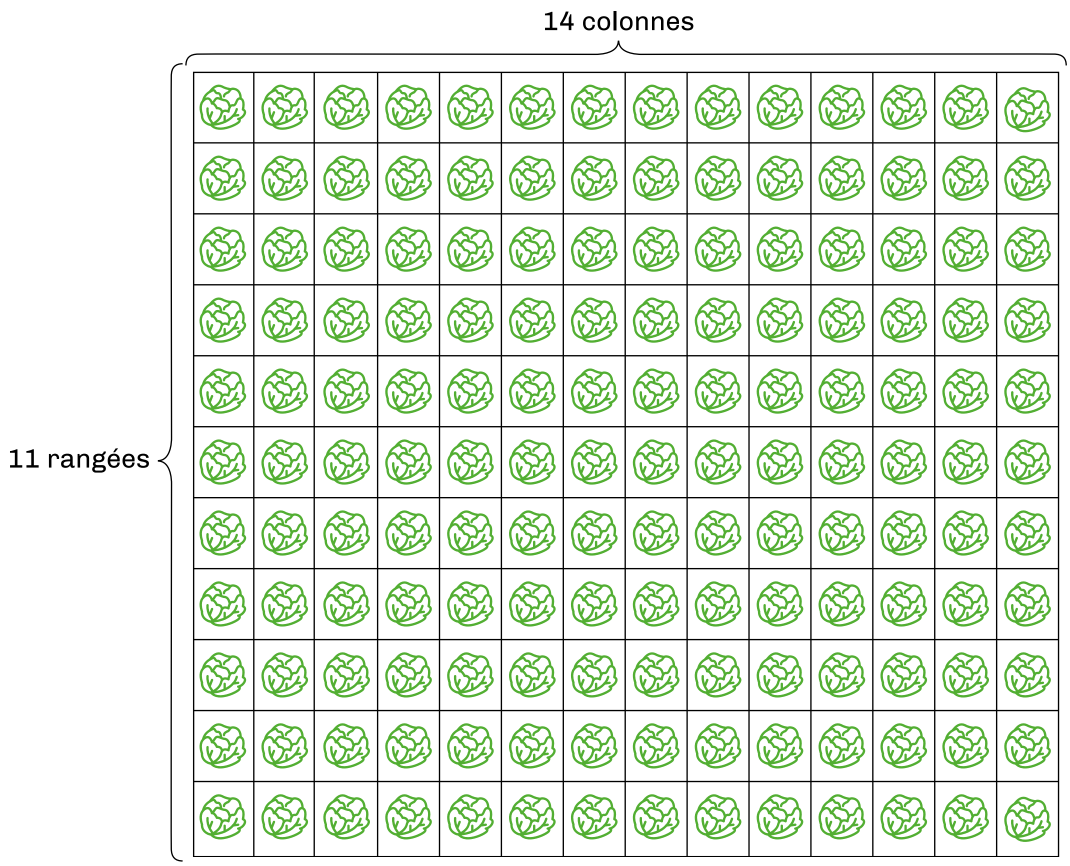
Des tableaux peuvent être utilisés pour illustrer des problèmes où une même quantité est répétée à l'identique plusieurs fois.

> « *Dans son potager, Yasmine a planté 11 rangées de 14 salades.*
> *Combien y a-t-il de salades dans le potager de Yasmine ?* »

Pour résoudre un tel problème, un schéma en barres convient tout à fait. Le produit correspond à une addition itérée, on ajoute 11 fois les 14 salades de chaque rangée. La réponse est donc obtenue en effectuant 11 x 14 salades.



Si cette représentation aide à modéliser le problème par la multiplication 11 x 14, elle ne permet cependant pas de soutenir la compréhension de la propriété de commutativité de la multiplication. En effet, la conception intuitive de la multiplication comme addition itérée rend contre-intuitive la commutativité de la multiplication : rien ne laisse penser en regardant ce schéma qu'un autre jardinier qui aurait planté 14 rangées de 11 salades aurait effectivement planté le même nombre de salades. Une représentation en tableau, comme ci-dessous, permet au contraire de rendre visible la commutativité de la multiplication.



En effet, au lieu de regarder les lignes du tableau, on peut regarder les colonnes : dans chacune des 14 colonnes, on a 11 salades. Comme le nombre de salades dans le tableau est inchangé, on a donc bien :

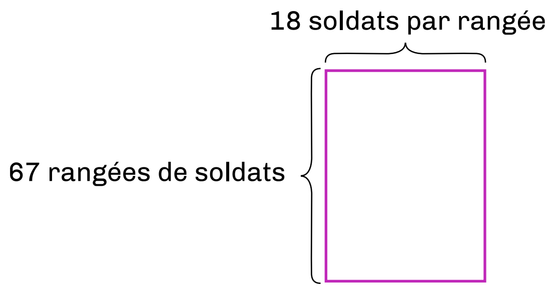
11 salades x 14 = 14 salades x 11.

Et donc, en comparant le nombre total de salades, 11 x 14 = 14 x 11. On peut ensuite aisément admettre que pour des situations analogues avec un nombre de rangées ou un nombre de salades par rangée différents, on pourrait écrire une égalité similaire.

Un tel tableau éclaire donc sur la commutativité de la multiplication : pour n'importe quels nombres entiers *a* et *b*, on a *a* x *b* = *b* x *a*. Il contribue aussi à se distancier de la conception de la multiplication comme simple addition itérée.

Il est clair que le schéma attendu des élèves ne comprend pas le dessin de chacune des salades et peut devenir très symbolique, comme ci-dessous.

> « *Lors d'une parade militaire, un régiment est représenté par 67 rangées de 18 soldats.*
> *Combien de soldats de ce régiment y a-t-il dans la parade militaire ?* »

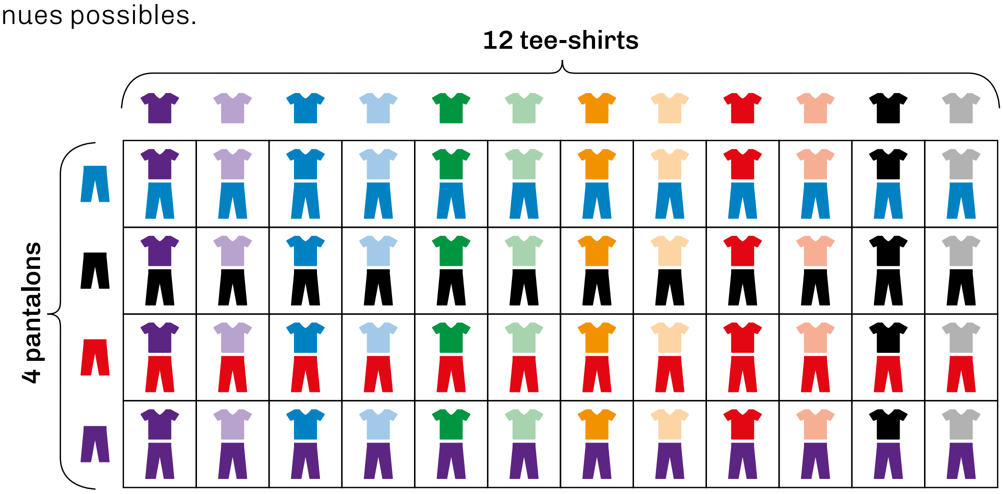


Les représentations en tableau sont particulièrement pertinentes pour représenter des situations faisant intervenir des produits cartésiens de deux ensembles. En effet, chaque case du tableau correspond alors à un élément du produit cartésien et, lorsqu'il s'agit de dénombrer les éléments de ce produit cartésien, une telle représentation permet d'aider les élèves à reconnaître une situation multiplicative.

Au sein du chapitre 1, dans la sous-partie « Les problèmes multiplicatifs » de la partie « Les problèmes en une étape », le problème suivant est proposé.

> « *Une poupée est livrée avec 4 pantalons et 12 tee-shirts.*
> *De combien de façons est-il possible d'habiller la poupée ?* »

L'ensemble des solutions est l'ensemble des couples constitués d'un pantalon et d'un tee-shirt, c'est-à-dire l'ensemble des tenues complètes que l'on peut constituer. Cet ensemble est représenté dans le tableau ci-dessous recensant toutes les tenues possibles.



Il convient de s'interroger face à un tel schéma sur l'exhaustivité des réponses trouvées dans le tableau : peut-il exister une tenue qui n'est pas dans le tableau ? La réponse est clairement non car le choix d'un pantalon donne une ligne et le choix d'un tee-shirt donne une colonne, il y a donc bien une case correspondant à cette ligne et cette colonne.

Il convient également de s'interroger sur la non-redondance des réponses trouvées dans le tableau : peut-il y avoir deux cases avec la même tenue ? La réponse est également non car si deux cases sont distinctes, si elles ne sont pas sur la même ligne, alors le pantalon est de couleur différente, et si elles sont sur la même ligne alors elles ne sont pas sur la même colonne car les cases sont distinctes, et donc les tee-shirts sont d'une couleur différente. Deux cases distinctes sont donc occupées par des tenues différentes.

La représentation sous forme de tableau permet alors de répondre, en reconnaissant une situation multiplicative (4 x 12), qu'il est possible d'habiller la poupée de 48 façons différentes. Compter les tenues dans le tableau serait par ailleurs possible, mais la reconnaissance d'une situation multiplicative permet la mise en œuvre d'une procédure de résolution clairement plus efficace.

> « *Dans notre classe, il y a 16 filles et 9 garçons. Pour l'élection des délégués, pour qu'un bulletin de vote soit valable, il faut inscrire le nom d'une fille et le nom d'un garçon de la classe.*
> *Combien de binômes différents un élève peut-il écrire, sachant qu'un élève a le droit de voter pour lui-même ?* »

On peut représenter la situation par le tableau suivant, qui permet de recenser l'ensemble des binômes possibles.

	Alice	Babeth	Chloé	Dana	Emma	Fabiola	Giulia	Héloïse	Inès	Jade	Kadiatou	Louise	Mia	Nina	Olivia	Paula
Arthur																
Baptiste																
Clément																
Diego																
Ethan																
Fahid																
Gabriel																
Hugo																
Isaac																

Chaque case correspond à un binôme possible et tous les binômes correspondent à une case. Le nombre de binômes possibles se justifie alors aisément ; il est égal à 16 x 9.

De façon générale, les tableaux sont utiles pour organiser la recherche de solutions parmi un ensemble de réponses possibles en s'assurant de l'exhaustivité de cette recherche.

Les arbres

Les arbres peuvent être utiles pour les problèmes faisant intervenir des dénombrements de produits cartésiens de plus de deux ensembles, l'utilisation d'un tableau à double entrée n'étant alors plus possible. C'est ce qui a été proposé dans le chapitre 1 pour le problème ci-dessous[87].

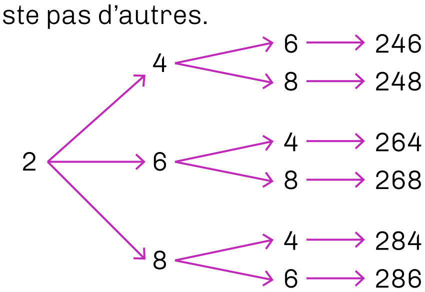
> « *Pour se déguiser, un clown dispose de :*
> *– 2 chapeaux (un rouge, un bleu) ;*
> *– 3 tee-shirts (un kaki, un noir, un jaune) ;*
> *– 2 pantalons (un rose, un vert).*
> *Combien de costumes différents complets, avec un chapeau, une veste et un pantalon, le clown peut-il faire ?*[88] »

Les arbres peuvent également se révéler intéressants lors de la résolution de problèmes pour lesquels on cherche à dresser une liste exhaustive des solutions possibles, sans qu'il s'agisse d'un produit cartésien ; comme par exemple pour des arrangements (parties ordonnées sans répétition) ou des combinaisons (parties non ordonnées sans répétition) des éléments d'un ensemble.

Exemple :

> « *Combien peut-on écrire de nombres à trois chiffres commençant par le chiffre 2 et en utilisant au plus une fois les chiffres 2, 4, 6 et 8 ?* »

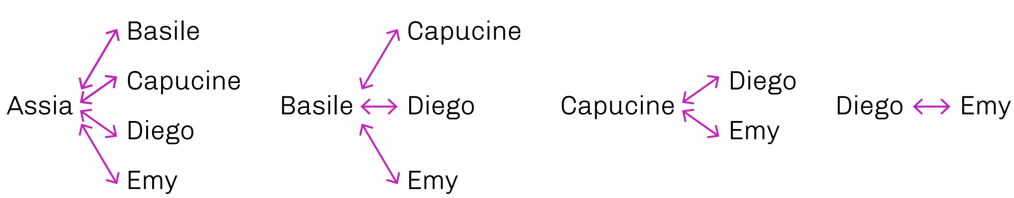
Un arbre permet de trouver rapidement les six solutions qui conviennent, en étant convaincu qu'il n'en existe pas d'autres.



Exemple :

> « *Assia, Basile, Capucine, Diego et Emy ont résolu ensemble un problème de mathématiques. Ils doivent désigner un binôme (deux élèves) parmi eux cinq pour présenter leur solution à la classe.*
> *Combien de binômes différents peut-on former avec ces cinq élèves ?* »

Une série d'arbres permet de lister de façon exhaustive les différents binômes possibles.



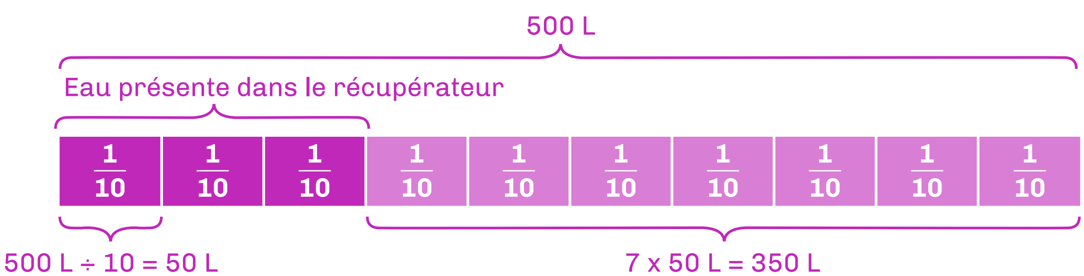
87 — Voir p. 35.
88 — Problème inspiré de https://edu1d.ac-toulouse.fr/politique-educative-31/ien31-toulouse-sud/files/2019/05/solutions_-pb_chercher_%C3%A9nonc%C3%A9s-cycle-2-et-3.pdf

Focus | Exemples de résolution de problèmes de cours moyen avec des fractions en utilisant des schémas en barres

Ce focus propose des exemples de résolution de problèmes utilisant des schémas en barres pour huit problèmes de CM1 avec des fractions. Certains de ces problèmes ne pourraient pas être résolus par des élèves de cours moyen sans le recours à un schéma en barres, les calculs nécessaires à leur résolution ne leur étant pas accessibles.

EXEMPLE 1

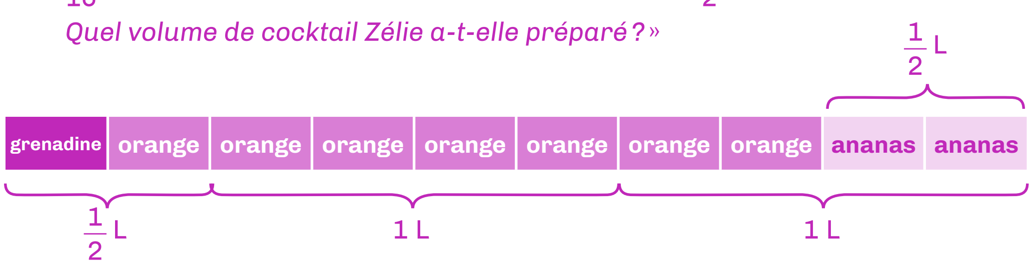
> *« Un récupérateur d'eau de 500 L est rempli aux $\frac{3}{10}$.*
> *Quelle quantité d'eau manque-t-il pour qu'il soit plein ? »*



Il manque 350 L d'eau pour que le récupérateur d'eau soit plein.

EXEMPLE 2

> *« Zélie a préparé un cocktail de jus de fruits qui contient $\frac{1}{10}$ de sirop de grenadine, $\frac{7}{10}$ de jus d'orange et du jus d'ananas. Elle a utilisé $\frac{1}{2}$ L de jus d'ananas.*
> *Quel volume de cocktail Zélie a-t-elle préparé ? »*



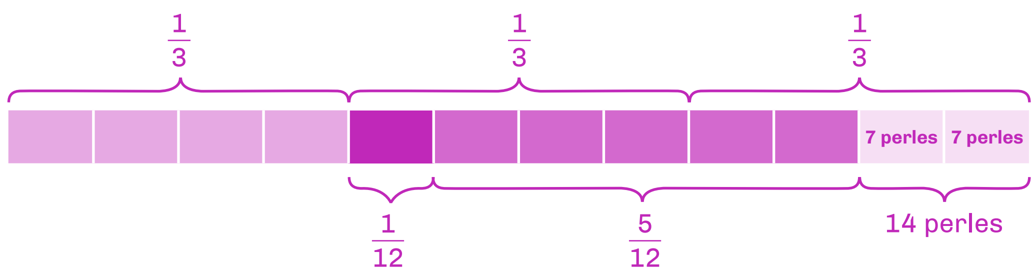
$2\text{ L} + \frac{1}{2}\text{ L} = 2{,}5\text{ L}$

Zélie a préparé 2,5 L de cocktail de jus de fruits.

EXEMPLE 3

> *« Dans un grand bocal, Iris a rangé ses perles de couleur. Il y en a des vertes, des bleues, des rouges et des jaunes. Un tiers des perles sont vertes, $\frac{1}{12}$ des perles sont bleues, $\frac{5}{12}$ des perles sont rouges et il y a 14 perles jaunes. Combien y a-t-il de perles de chaque couleur ? »*

Une difficulté dans ce problème est de devoir partager l'ensemble des perles en 3 et en 12 de façon simultanée. C'est-à-dire comprendre que 4 douzièmes est égal à 1 tiers.

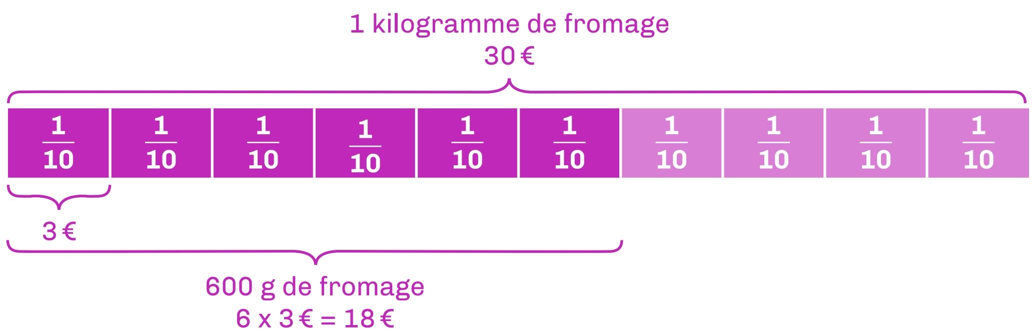


14 perles ÷ 2 = 7 perles ; un rectangle représente 7 perles.
7 perles x 5 = 35 perles ; il y a 35 perles rouges.
7 perles x 4 = 28 perles ; il y a 28 perles vertes.
Iris a 14 perles jaunes, 7 perles bleues, 35 perles rouges et 28 perles vertes.

EXEMPLE 4

> *« Un fromage est vendu au prix de 30 € par kilogramme.*
> *Quel est le prix d'un morceau de ce fromage de 600 g ? »*

600 g = 0,6 kg = $\frac{6}{10}$ kg



Le prix du morceau de 600 g de ce fromage est 18 €.

EXEMPLE 5

« Le nombre de billes de Marius est égal au quart du nombre de billes de Giulia.
Giulia a 36 billes de plus que Marius.
Combien de billes a Giulia ? »

36 billes ÷ 3 = 12 billes
Un rectangle représente 12 billes.
12 billes x 4 = 48 billes
Giulia a 48 billes.

EXEMPLE 6

« Pour la fête des mères, Joseph et sa petite sœur Lana ont acheté un bouquet à 36 €. Lana a payé le tiers de ce que Joseph a payé.
Combien chacun des enfants a-t-il payé pour le bouquet ? »

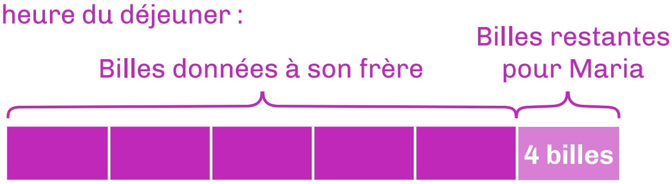
36 € ÷ 4 = 9 €
9 € x 3 = 27 €
Pour le bouquet, Joseph a payé 27 € et sa sœur Lana a payé 9 €.

EXEMPLE 7

« Ce mardi, Maria joue aux billes à l'école. À la récréation du matin, elle perd $\frac{1}{4}$ de ce qu'elle avait en arrivant à l'école. À l'heure du déjeuner, elle donne à son petit frère $\frac{5}{6}$ des billes qu'il lui reste car il a perdu toutes les siennes. Il reste maintenant 4 billes à Maria.
Combien Maria avait-elle de billes en arrivant ce matin à l'école ? »

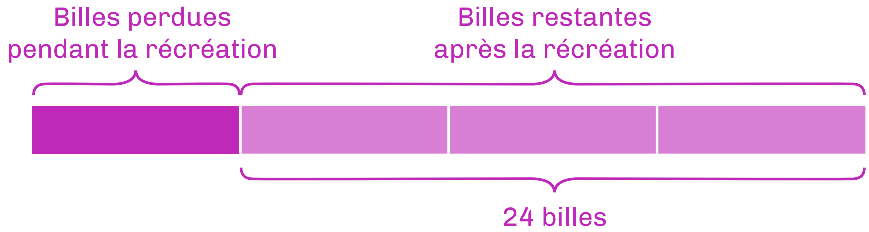
Méthode 1

Les billes à l'heure du déjeuner :



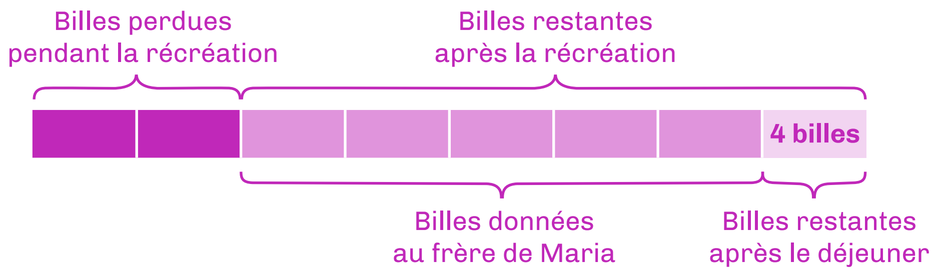
5 x 4 billes = 20 billes
Maria a donné 20 billes à son frère.
20 billes + 4 billes = 24 billes
Maria avait 24 billes avant le déjeuner.

Les billes le matin à l'école :



24 billes ÷ 3 = 8 billes
Un rectangle représente 8 billes.
8 billes x 4 = 32 billes
Maria avait 32 billes en arrivant à l'école ce matin.

Méthode 2



4 billes x 2 = 8 billes
8 billes x 4 = 32 billes
Maria avait 32 billes en arrivant à l'école ce matin.

EXEMPLE 8

> *« Raphaël, Ali et Elsa ont effectué une course de relais. Raphaël a parcouru la moitié de la distance parcourue par Ali et Ali a parcouru le tiers de la distance parcourue par Elsa. À eux trois, ils ont couru 1 800 m.*
> *Quelle distance a couru chaque enfant ? »*

1 + 2 + 6 = 9
Il y a 9 rectangles identiques.
1 800 m ÷ 9 = 200 m ; 200 m x 2 = 400 m ; 400 m x 3 = 1 200 m
Raphaël a couru 200 m, Ali a couru 400 m et Elsa a couru 1 200 m.

En résumé

- Les apprentissages relatifs à la résolution de problèmes ne se construisent pas en une année ni même en un cycle, mais tout au long de la scolarité obligatoire. **Les stratégies d’enseignement mises en œuvre doivent donc être collectives** afin que les élèves puissent s’appuyer chaque année sur ce qui a été appris les années précédentes. Ceci est particulièrement vrai pour les schémas enseignés pour soutenir la modélisation.

- Les séances d’enseignement de résolution de problèmes doivent être inscrites dans des séquences aux **objectifs clairement définis et explicités aux élèves**. Pendant ces séances, les élèves doivent disposer de temps suffisants pour résoudre eux-mêmes les problèmes qui leur sont proposés. Il faut veiller à soutenir, de façon appropriée et au moment opportun, chaque élève rencontrant une difficulté qu’il ne peut pas surmonter lui-même.

- **L’évaluation doit être utilisée pour soutenir les apprentissages.** Elle permet à l’enseignant de renforcer sa connaissance de ce que sait faire chacun des élèves à un instant donné et aide les élèves à structurer et renforcer leurs apprentissages comme le montrent les sciences cognitives.

De l'école au collège : la résolution de problèmes dans le cadre de la liaison CM2-6^{e}

Le travail mené en résolution de problèmes au cours moyen permet de faire acquérir aux élèves les connaissances et compétences nécessaires pour aborder sereinement les problèmes qu'ils devront résoudre en dernière année de cycle 3, puis au cycle 4. Ce travail contribue à la construction progressive, tout au long de la scolarité, des six compétences majeures de l'activité mathématique inscrites dans les programmes[89].

Les stratégies acquises et les outils que les élèves ont appris à utiliser, notamment pour effectuer des représentations permettant de soutenir la résolution de problèmes, continueront à leur être utiles tout au long du collège, en particulier pour accompagner et renforcer le travail mené en algèbre.

La résolution de problèmes au cœur de l'enseignement des mathématiques au collège comme à l'école élémentaire

La résolution de problèmes continue d'occuper une place centrale dans l'enseignement des mathématiques au collège. Les attendus de fin d'année de sixième mettent en évidence la continuité du travail à mener en rappelant les attentes concernant les problèmes verbaux à une ou plusieurs étapes : l'élève « résout des problèmes relevant des structures additives et multiplicatives en mobilisant une ou plusieurs étapes de raisonnement ».

89 — Chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner et communiquer.

Le programme du cycle 4[90] confirme la place centrale accordée à la résolution de problèmes tout au long du collège, en insistant sur le renforcement d'automatismes, le développement de la capacité à faire des analogies avec les problèmes préalablement résolus et l'acquisition d'aptitudes générales comme la prise d'initiative : « Une place importante doit être accordée à la résolution de problèmes. Mais pour être en capacité de résoudre des problèmes, il faut à la fois prendre des initiatives, imaginer des pistes de solution et s'y engager sans s'égarer en procédant par analogie, en rattachant une situation particulière à une classe plus générale de problèmes [...]. Ceci suppose de disposer d'automatismes (corpus de connaissances et de procédures automatisées immédiatement disponibles en mémoire). »

Exemples de problèmes pouvant avoir été résolus au cours moyen

Cette partie a pour objet de compléter la liste des nombreux problèmes proposés dans ce guide. Certains des problèmes proposés ici sont issus de travaux de recherche. Ces problèmes peuvent être utilisés en classe au cours moyen lorsque les compétences nécessaires à leur résolution sont enseignées. Ils peuvent permettre de nourrir les échanges entre les professeurs de cours moyen et les professeurs de mathématiques de sixième pour donner à voir des exemples de problèmes qui ont été résolus par les élèves avant leur entrée au collège.

- « *Un paquet de sablés coûte 2,15 € et un paquet de madeleines coûte 4,05 €.*
  Combien dois-je payer pour ces deux paquets de gâteaux ? »
- « *Un paquet de sablés coûte 2,15 €. J'ai acheté un paquet de sablés et un paquet de madeleines et j'ai payé 6,20 €.*
  Quel est le prix d'un paquet de madeleines ? »
- « *Le mois dernier, le chiot de Basile pesait 3,8 kg. Il a grossi de 1,3 kg en un mois.*
  Combien pèse le chiot de Basile maintenant ? »
- « *Il y a deux mois le chiot de Basile a été malade et a perdu 1,1 kg. Ce mois-ci, il a grossi de 2,3 kg. Il pèse maintenant 9,4 kg.*
  Combien pesait le chiot de Basile il y a deux mois ? »
- « *Léa a parcouru 72 km depuis le péage de l'autoroute. Elle a maintenant parcouru 738,5 km depuis qu'elle a quitté sa maison.*
  Quelle distance a-t-elle parcourue entre sa maison et le péage de l'autoroute ? »
- « *Pour la bibliothèque de fond de classe, le maître a acheté 6 exemplaires du même livre. Il a payé 32,10 €.*
  Quel est le prix d'un livre ? »

90 — BOENJS n° 31 du 30 juillet 2020.

— « *Pour la classe de CM2, le maître a commandé des manuels de mathématiques. Chaque manuel coûte 13 €. La facture s'élève à 338 €. Combien de manuels le maître a-t-il commandés ?* »

— « *Mathéo achète deux baguettes à 1,05 € et un croissant à 1,25 €. Combien doit-il payer au boulanger ?* »

— « *Rachid retire 30 € au distributeur, puis achète un livre à 37,50 €. Il lui reste maintenant 12 €. Combien d'argent Rachid avait-il avant d'aller au distributeur ?* »

— « *Erwan a fait des courses. La vendeuse lui a donné le ticket ci-dessous :*

Eau 3,60 €
Chocolat 2,10 €
Pain 0,85 €

Il a payé avec un billet de 10 €. Il recompte la monnaie qui lui a été rendue et trouve 2,45 €. Il pense qu'il a perdu une pièce. Quelle pièce a-t-il pu perdre ?[91] »

— « *Claude raconte à son copain : "La semaine dernière, les élèves des classes de deuxième année ont décidé de se cotiser pour offrir un cadeau à Kévin, hospitalisé. Chacun a donné 0,50 €. Chargé de l'achat du cadeau, j'ai constaté qu'il manquait 15 €. J'ai réclamé 0,20 € supplémentaires par élève et j'ai alors eu 11 € de trop." Calcule le prix du cadeau.*[92] »

Exemples d'utilisation au collège des représentations schématiques introduites au cours moyen

Cette partie a pour objectif de montrer explicitement comment les outils introduits à l'école élémentaire pour soutenir la résolution de problèmes peuvent continuer à être utilisés au collège dans le cadre de la résolution de problèmes relevant du collège (ratios, algèbre, probabilités, etc.).

91 — Problème proposé dans une évaluation nationale de CM2 en mai 2012 (53 % de réussite).

92 — Problème proposé par Annick Fagnant dans une intervention menée au sein de l'académie de Paris.

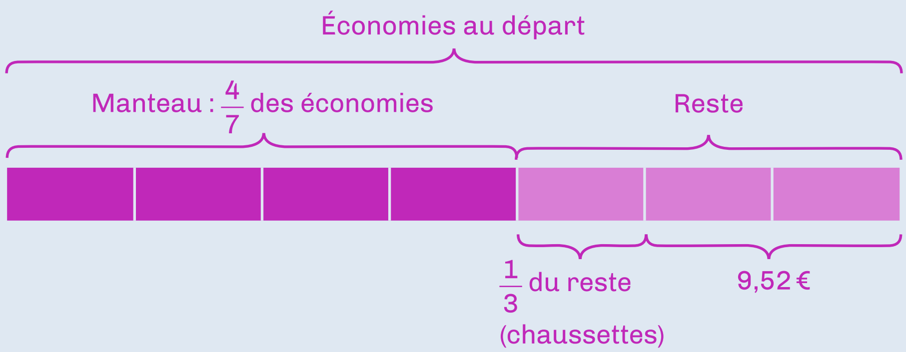
Utilisation des schémas en barres pour des problèmes de fractions, pourcentages ou ratios

PROBLÈMES DE FRACTIONS

Exemple :

> « *J'ai dépensé 4 septièmes de mes économies pour acheter un manteau et le tiers du reste pour une paire de chaussettes. J'ai maintenant 9,52 €.*
> *Combien avais-je d'économies au départ ?**[93] »

La résolution peut s'appuyer sur les outils utilisés à l'école élémentaire.



9,52 € ÷ 2 = 4,76 €
4,76 € x 7 = 33,32 €
J'avais 33,32 € d'économie au départ.

Cette représentation permet d'illustrer les calculs algébriques menés au collège.
En notant x les économies au départ, la somme restante après les achats est égale à :

$$\left(1-\frac{4}{7}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)x=\frac{3}{7}\times\frac{2}{3}x=\frac{2}{7}x$$

On va donc chercher x tel que $\frac{2}{7}x = 9{,}52$; la fraction $\frac{2}{7}$ apparaissait clairement sur le schéma.

93 — Dans ce chapitre, les problèmes suivis du symbole « * » sont extraits du guide *La Résolution de problèmes mathématiques au collège*, coll. « Les guides fondamentaux pour enseigner », 2021.

PROBLÈMES DE POURCENTAGES

Exemple :

> « *Angel veut acheter une paire de chaussures. Elle a droit à une réduction de 15 % par rapport au prix normal. Le vendeur lui dit que la réduction sera de 12 €. Quel est le prix normal ?*[94] »

15 % du prix normal ⟷ 12 €
30 % du prix normal ⟷ 24 €
10 % du prix normal ⟷ 8 €
100 % du prix normal ⟷ 80 €

Le schéma permet aussi de soutenir la production du tableau de proportionnalité au collège :

	Réduction	**Prix normal**
Part du prix normal en %	15	100
Montant en €	12	x

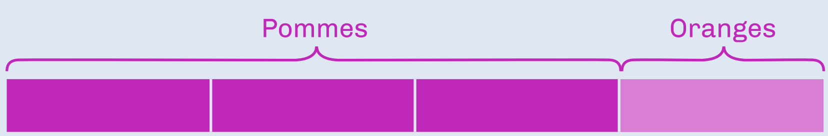
En fin de cycle 4, le tableau conduit au calcul automatisé $x = \dfrac{12 \times 100}{15}$.

Exemple :

> « *Dans un panier, il y a des pommes et des oranges. 25 % des fruits sont des oranges. Mary achète des oranges en plus et les met dans le panier. Il y a maintenant deux fois plus d'oranges qu'avant.*
> *Quel pourcentage des fruits sont des pommes après l'achat de Mary ?*[95] »

$25\,\% = \dfrac{1}{4}$

Au départ :



94 — Herani Tri Lestiana, Cici Tri Wanita, "Bar Model: a beneficial tool in learning percentage", *Eduma, Mathematics Education Learning and Teaching*, Vol. 8, n° 2, 2019.
95 — *Ibid*, p. 67, note 51.

Mary double le nombre d'oranges :

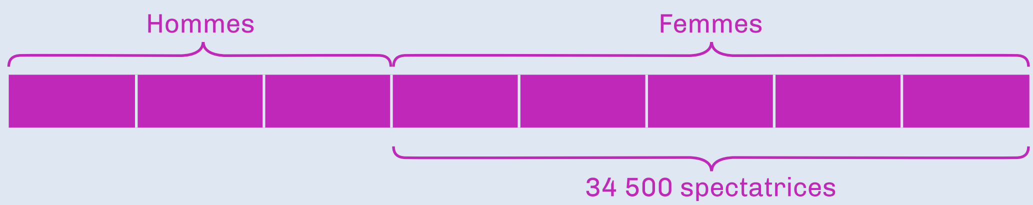
La part des pommes parmi les fruits est maintenant : $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{60}{100} = 60\,\%$.

PROBLÈMES DE RATIOS

Exemple :

> « *Lors d'un match de football, le ratio hommes-femmes du public est de 3:5. Combien y a-t-il d'hommes dans le public sachant qu'il y a 34 500 femmes ?* »

3 + 5 = 8 ; il y a huit parts égales.

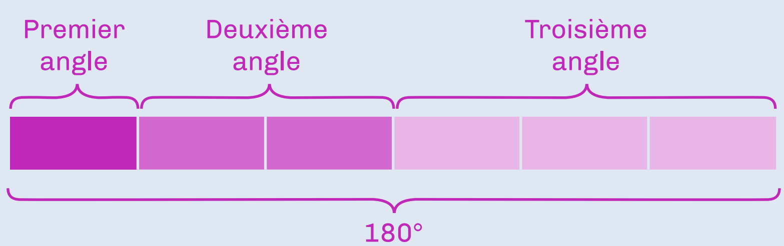


34 500 ÷ 5 = 6 900 ; une part correspond à 6 900 personnes.
3 x 6 900 = 20 700 ; il y a 20 700 hommes dans le public de ce stade.

Exemple :

> « *Quelle est la nature d'un triangle dont les angles sont dans le ratio 1:2:3 ?** »

1 + 2 + 3 = 6 ; il y a six parts égales.
La somme des mesures des angles d'un triangle est 180°.

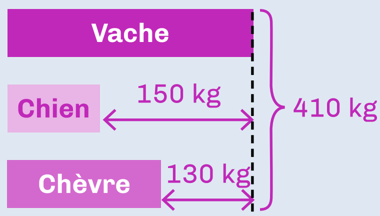


180° ÷ 6 = 30° ; le premier angle mesure 30°.
2 x 30° = 60° ; le deuxième angle mesure 60°.
3 x 30° = 90° ; le troisième angle mesure 90°.
Le triangle est un triangle rectangle.

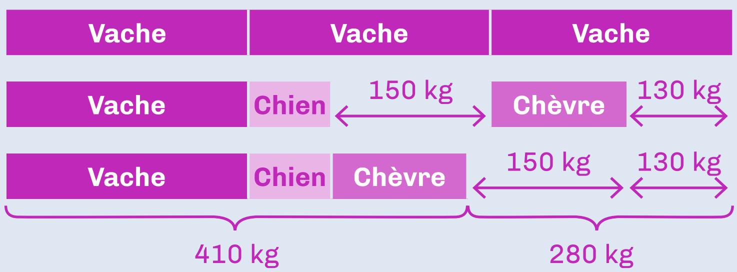
Utilisation des schémas en barres pour illustrer des problèmes algébriques

Exemple :

« *Une vache pèse 150 kg de plus qu'un chien. Une chèvre pèse 130 kg de moins que la vache. Ensemble, les trois animaux pèsent 410 kg.*
Quelle est la masse de la vache ?[96] »



On peut raisonner avec trois fois la masse de la vache, en schématisant ainsi :



Trois fois la masse de la vache est donc égal à 410 kg + 280 kg c'est-à-dire 690 kg.
690 kg ÷ 3 = 230 kg ; la vache pèse 230 kg.

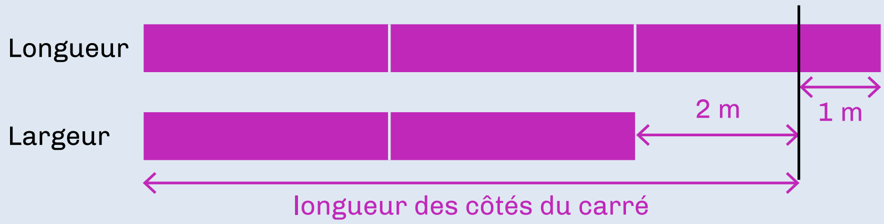
Le calcul algébrique reproduit le même raisonnement : en notant x la masse de la vache, en kilogramme, on trouve que celle du chien est $(x - 150)$ kg et que celle de la chèvre est $(x - 130)$ kg.
On en déduit l'équation correspondant à la somme des masses des trois animaux :
$x + (x - 150) + (x - 130) = 410$.
On retrouve alors la relation obtenue avec le schéma : $3x = 410 + 280$.

Exemple :

« *Un rectangle a une longueur et une largeur dans le ratio 3:2. Si je diminue la longueur de 1 m et si j'augmente la largeur de 2 m, j'obtiens un carré.*
Quelle est son aire ? »

L'obtention d'un carré signifie que la largeur et la longueur deviennent égales.

96 — *Ibid*, p. 109, note 80.



À partir du schéma, on visualise immédiatement qu'une petite barre violette correspond à une longueur de 3 mètres. On en déduit que le rectangle a une longueur de 9 mètres et une largeur de 6 mètres, et ensuite que le carré a des côtés mesurant 8 mètres. Son aire est donc de 64 m^2.

En notant x la longueur du côté du carré, on obtient une équation où chaque membre correspond à la longueur représentée par une petite barre violette dans les deux lignes du schéma $\frac{x+1}{3} = \frac{x-2}{2}$,ce qui permet de trouver la valeur de x.

Utilisation de tableaux

Exemple :

> « *On lance deux dés.*
> *Quelle est la probabilité d'obtenir un résultat compris entre 7 et 19 en faisant le produit des nombres obtenus sur chaque dé ?* »

On réalise un tableau recensant les 36 cas possibles :

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Il y a 14 cas correspondant à ce qui est recherché. La probabilité est de $\frac{14}{36}$.

Exemple :

« *Pour le championnat de rugby, une équipe reçoit 3 points par victoire et 1 point par match nul. Après 25 matchs, une équipe a marqué 55 points.*
*Combien de matchs a-t-elle pu perdre ?** »

Si l'équipe avait gagné 10 matchs, alors elle aurait gagné 30 points pour ces matchs. Il manque alors 25 points pour atteindre les 55 points qu'elle a marqués au total : cela ferait 25 matchs nuls. Cela voudrait dire qu'elle aurait joué au moins 35 matchs. C'est impossible, car au total, elle a joué 25 matchs. L'équipe a donc nécessairement gagné plus de 10 matchs.

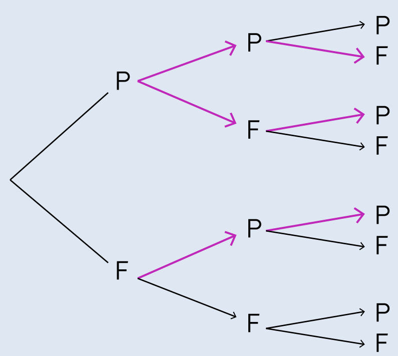
Nombre de matchs gagnés	**Nombre de matchs nuls nécessaires pour atteindre 55 points**	**Nombre de matchs perdus nécessaires pour atteindre 25 matchs**
10	25, impossible (10 + 25 > 25)	
11	22, impossible (11 + 22 > 25)	
12	19, impossible (12 + 19 > 25)	
13	16, impossible (13 + 16 > 25)	
14	13, impossible (14 + 13 > 25)	
15	10	0 (25 – 15 – 10)
16	7	2 (25 – 16 – 7)
17	4	4 (25 – 17 – 4)
18	1	6 (25 – 18 – 1)
19	Impossible (3 x 19 = 57 > 55)	

L'équipe a pu perdre 0, 2, 4 ou 6 matchs.

Utilisation d'arbres

Exemple :

« *On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée.*
Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois "pile" et une fois "face" ? »



L'arbre permet de repérer les 3 cas favorables parmi les 8 possibles. La probabilité est de $\frac{3}{8}$.

Bibliographie et outils de référence

OUVRAGES

- Crahay Marcel, Verschaffel Lieven, De Corte Erik, Grégoire Jacques, *Enseignement et apprentissage des mathématiques*, De Boeck Supérieur, Bruxelles, 2008.
- Dehaene Stanislas, *Apprendre ! Les talents du cerveau, le défi des machines*, Odile Jacob, Paris, 2018.
- Houdé Olivier, *Apprendre à résister*, Le Pommier-Humensis, Paris, 2019.
- Lakoff George, Núñez Rafael, *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being*, Basic Books, New York, 2001.
- Lautrey Jacques, Rémi-Giraud Sylviane, Sander Emmanuel, Tiberghien Andrée, *Les Connaissances naïves*, Armand Colin, Paris, 2008.
- Pólya George, *Comment poser et résoudre un problème*, Dunod, Paris, 1965 (traduction de *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*, 1945).
- Polotskaia Elena, Gervais Claudine, Savard Annie, *Représenter pour mieux raisonner. Résolution de problèmes écrits d'addition et de soustraction*, JFD, Montréal, 2019.
- Singer Florence Mihaela, Ellerton Nerida F., Cai Jinfa, *Mathematical Problem Posing – From Research to Effective Practice*, Springer, 2005.
- Sophian Catherine, *The Origins of Mathematical Knowledge in Childhood*, Routledge, New York, 2007.
- Willingham Daniel T., *Pourquoi les enfants n'aiment pas l'école ?*, La Librairie des Écoles, 2010.

ARTICLES

- Barnett Susan, Ceci Stephen, "When and Where Do We Apply What We Learn? A Taxonomy for Far Transfer", *Psychological bulletin*, n° 128, 2002.
- Barrouillet Pierre, Camos Valérie, « Savoirs, savoir-faire arithmétiques et leurs déficiences », dans Michèle Kail et Michel Fayol (dir.), *Les Sciences cognitives et l'école. La question des apprentissages*, PUF, Paris, 2003.

- Bassok Miriam, “Semantic Alignments in Mathematical Word Problems”, in Dedre Gentner, Keith J. Holyoak, Boicho N. Kokinov (eds.), *The Analogical Mind: Perspectives from Cognitive Science*, Cambridge, MA, MIT Press, 2001.
- Bassok Miriam, Chase Valerie, Martin Shirley, “Adding Apples and Oranges: Alignment of Semantic and Formal Knowledge”, *Cognitive Psychology*, n° 35, 1998.
- Bassok Miriam, Pedigo Samuel, Oskarsson An, “Priming Addition Facts With Semantic Relations”, *Journal of Experimental Psychology. Learning, Memory, and Cognition*, n° 34, 2008
- Berends Inez, Van Lieshout Ernest C. D. M., “The Effect of Illustrations in Arithmetic Problem-Solving: Effects of Increased Cognitive Load”, *Learning and Instruction*, n° 19, 2009.
- Butlen Denis, Charles-Pézard Monique, « Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté. Le calcul mental entre sens et technique », *Grand N*, n° 79, 2007.
- Daroczy Gabriella, Meurers Detmar, Heller Juergen, Wolska Magdalena, Nuerk Hans-Christoph, “The Interaction of Linguistic And Arithmetic Factors Affects Adult Performance on Arithmetic Word Problems”, *Cognitive Processing*, n° 21, 2020.
- Demonty Isabelle, Dupont Virginie, Fagnant Annick, « Analyse des régulations interactives entre élèves lors de la résolution d'un problème mathématique en groupe », *Les Cahiers des sciences de l'éducation*, n° 36, 2014.
- Devidal Michel, Fayol Michel, Barrouillet Pierre, « Stratégies de lecture et résolution de problèmes arithmétiques », *L'Année psychologique*, Vol. 97, n° 1, PUF, 1997.
- Doabler Christian, Baker Scott, Kosty Derek, Smolkowski Keith, Clarke Ben, Miller Saralyn, Fien Hank, “Examining the Association Between Explicit Mathematics Instruction and Student Mathematics Achievement”, *The Elementary School Journal*, n° 115, 2015.
- Dooren Wim, Bock Dirk, Evers Marleen, Verschaffel Lieven, “Students' Overuse of Proportionality on Missing-Value Problems: How Numbers May Change Solution”, *Journal for Research in Mathematics Education*, n° 40, 2009.
- Durkin Kelley, Star Jon R., Rittle-Johnson Bethany, “Using Comparison of Multiple Strategies in the Mathematics Classroom: Lessons Learned and Next Steps”, *ZDM – Mathematic Education*, n° 49, 2017.

- Fagnant Annick, Vlassis Joëlle, “Schematic Representations in Arithmetical Problem Solving: Analysis of Their Impact on Grade 4 Students”, *Educational Studies in Mathematics*, n° 84, 2013.
- Fayol Michel, Thévenot Catherine, Dévidal Michel, « La résolution de problèmes », dans Marie-Pascale Noël, *La Dyscalculie : trouble du développement numérique de l’enfant*, Solal, 2005.
- Fischbein Efraim, Deri Maria, Nello Maria, Marino Maria, “The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division”, *Journal for Research in Mathematics Education*, n° 16, 1985.
- Gamo Sylvie, Nogry Sandra, Sander Emmanuel, « Apprendre à résoudre des problèmes en favorisant la construction d’une représentation alternative chez des élèves scolarisés en éducation prioritaire », *Psychologie française*, n° 59, 2014.
- Greer Brian, “The Mathematical Modeling Perspective on Wor(l)d Problems”, *The Journal of Mathematical Behavior*, n° 12, 1993.
- Gros Hippolyte, Thibaut Jean-Pierre, Sander Emmanuel, “Semantic Congruence in Arithmetic: A New Conceptual Model for Word Problem Solving”, *Educational Psychologist*, n° 55, 2020.
- Gvozdic Katarina, Sander Emmanuel, “Learning to Be an Opportunistic Word Problem Solver: Going Beyond Informal Solving Strategies”, *ZDM - Mathematic Education*, n° 52, 2019.
- Hanin Vanessa, Van Nieuwenhoven Catherine, « Évaluation d’un dispositif pédagogique visant le développement de stratégies cognitives et métacognitives en résolution de problèmes en première secondaire », *Évaluer. Journal international de recherche en éducation et formation*, Vol. 2, n° 1, 2016.
- Houdement Catherine, « Résolution de problèmes arithmétiques à l’école », *Grand N*, n° 100, IREM de Grenoble, 2017.
- Hudson Tom, “Correspondences and Numerical Differences Between Disjoint Sets”, *Child Development*, n° 54(1), 1983.
- Kaur Berinderjeet, “The Why, What and How of the ’Model’ Method: A Tool for Representing and Visualising Relationships When Solving Whole Number Arithmetic Word Problems”, *ZDM – Mathematics Education*, n° 51, Springer, 2018.

— Levain Jean-Pierre, « La résolution de problèmes multiplicatifs à la fin du cycle primaire », *Educational Studies in Mathematics*, n° 23, 1992.

— Lovett Marsha C., “Problem solving”, in Hal Pashler, Douglas Medin (eds.), *Stevens' Handbook of Experimental Psychology: Memory and Cognitive Processes*, John Wiley & Sons Inc, New York, 2002.

— Novick Laura, “Analogical Transfer, Problem Similarity, and Expertise”, *Journal of Experimental Psychology. Learning, Memory, and Cognition*, n° 14, 1988.

— Ng Swee, Lee Kerry, “The Model Method: Singapore Children's Tool for Representing and Solving Algebraic Word Problems”, *Journal for Research in Mathematics Education*, n° 40, 2009.

— Polotskaia Elena, “How the Relational Paradigm Can Transform the Teaching and Learning of Mathematics: Experiment in Quebec”, *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, Vol. 18, n° 2, 2017.

— Riley Mary, Greeno James, Heller Joan, “Development of Children's Problem Solving Ability in Arithmetic”, in Ginsburg Herbert P., *The Development of Mathematical Thinking*, Academic Press, New York, 1983.

— Roditi Éric, Salles Franck, « Nouvelles analyses de l'enquête Pisa 2012 en mathématiques : un autre regard sur les résultats », dans « Évaluation des acquis : principes, méthodologie, résultats », Éducation et Formations, n° 86-87, ministères chargés de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche, Direction de l'évaluation et de la prospective, 2015.

— Roediger Henry, Karpicke Jeffrey, “Test-Enhanced Learning: Taking Memory Tests Improves Long-Term Retention”, *Psychological Science*, n° 17, 2006.

— Sander Emmanuel, « La résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux », *Approche Neuropsychologique des Apprentissages chez l'Enfant*, n° 156, 2018.

— Sander Emmanuel, Richard Jean-François, « Les Apprentissages numériques », dans Miljkovitch Raphaële, Morange-Majoux Françoise, Sander Emmanuel (dir.), *Psychologie du développement*, Elsevier-Masson, Paris, 2017.

- Savard Annie, Polotskaia Elena, « Gérer l'accès aux mathématiques dans la résolution de problèmes textuels : une exploration du côté de l'enseignement primaire », *Éducation et francophonie*, Vol. 42, n° 2, 2014.
- Scheibling-Sève Calliste, Pasquinelli Elena, Sander Emmanuel, "Assessing Conceptual Knowledge Through Solving Arithmetic Word Problems", *Educational Studies in Mathematics*, n° 103, 2020.
- Silver Edward, "Student Perceptions of Relatedness among Mathematical Verbal Problems", *Journal for Research in Mathematics Education*, n° 10, 1979.
- Squire Sarah, Bryant Peter, "From Sharing to Dividing: Young Children's Understanding of Division", *Developmental Science*, n° 5, 2002.
- Vendetti Michael, Matlen Bryan, Richland Lindsey, Bunge Silvia, "Analogical Reasoning in the Classroom: Insights From Cognitive Science", *Mind Brain and Education*, Vol. 9, n° 2, 2015.
- Vergnaud Gérard, "A Classification of Cognitive Tasks and Operations of Thought Involved in Addition and Subtration Problems", dans Carpenter Thomas P., Moser James M., Romberg Thomas A. (eds.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective*, Hillsdale: Erlbaum, 1982.
- Verschaffel Lieven, De Corte Erik, « La modélisation et la résolution des problèmes d'application : de l'analyse à l'utilisation efficace », dans Crahay Marcel, Verschaffel Lieven, De Corte Erik, Grégoire Jacques (dir.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?*, De Boeck, Bruxelles, 2008.
- Verschaffel Lieven, De Corte Erik, Lasure Sabien, "Realistic Considerations in Mathematical Modeling of School Arithmetic Word Problems", *Learning and Instruction*, Vol. 4, 1994.

RAPPORTS, CONTRIBUTIONS ET CONFÉRENCES

- Artigue Michèle, *Les Défis de l'enseignement des mathématiques dans l'éducation de base*, Unesco, Paris, 2011.
- Houdement Catherine, « Problèmes arithmétiques basiques : le cœur du problème », Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM, 2018.
- Masselot Pascale, « Différenciation à l'école primaire et au début du collège : un point de vue de didacticienne des mathématiques », propos recueillis par Richard Cabassut, Opinions, site Apmep : https://afdm.apmep.fr/, 2018.
- OCDE, *Tous égaux face aux équations ? Rendre les mathématiques accessibles à tous*, Pisa, Éditions OCDE, Paris, 2016.
- Priolet Maryvonne, « Enseignement et apprentissage de la résolution de problèmes mathématiques », Thèse de doctorat, Université Lyon 2, 2008.
- Polotskaia Elena, "How Elementary Students Learn to Mathematically Analyze Word Problems: The Case of Addition and Subtraction", thèse de doctorat, McGill University, Montréal, 2014.
- Scott Cynthia Luna, « Les Apprentissages de demain 2 : quel type d'apprentissage pour le XXIe siècle », *Recherche et prospective en éducation : réflexions thématiques*, n° 14, 2015

Conception graphique et éditoriale
Délégation à la communication

Suivi éditorial
Julie Mege

Exécution graphique
Opixido

Suivi de fabrication
Service de l'action administrative et des moyens

Impression
DEJA LINK

Janvier 2022

ISBN 978-2-11-162850-2
ISSN 2647-4786

Savoirs & compétences

RESSOURCES PÉDAGOGIQUES

L'ÉCOLE DE LA CONFIANCE